

Die Erwärmung eines unterirdischen Ölfeldes beim Einpressen von heißem Wasser

Elgeti, Klaus

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 21, 1969,
S.365-406



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Erwärmung eines unterirdischen Ölfeldes beim Einpressen von heißem Wasser

Von Klaus Elgeti

Vorgelegt von H. Hausen

(Eingegangen am 13. 2. 1969)

1. Einleitung

Wenn in unterirdischen Erdöllagern der natürliche Lagerdruck von Anfang an oder später zur Gewinnung des Öls nicht ausreicht und auch einfaches Pumpen keine genügende Förderleistung erbringt, wendet man sogenannte Sekundärverfahren an, wie sie z. B. W. Rühl [26] beschrieben hat. Vielfach wird Gas oder Wasser in das Lager eingedrückt. Bei den thermischen Sekundärverfahren, die die Förderung auch sehr zäher Öle ermöglichen, bemüht man sich, das Öl zu erwärmen, vor allem um die Zähigkeit des Öles herabzusetzen und dadurch dessen Fließeigenschaften zu verbessern.

Ein thermisches Verfahren kann z. B. darin bestehen, einen Teil des Öls im Lager unter Zufuhr von Luft zu verbrennen [28, 30]. Neuerdings ist auch vorgeschlagen worden, die Förderung mit Hilfe von Kernenergieexplosionen zu verbessern [4, 31, 32]. Nach einem anderen Verfahren drückt man heißes Wasser oder auch überhitzten Dampf durch eine Bohrung in die Lagerstätte, um das Ölfeld in der Umgebung der Bohrung zu erwärmen. Nach genügend langer Erwärmung kann man das Öl durch dieselbe Bohrung abziehen [24, 25], man kann es aber auch schon während des Eindrückens von Wasser oder Dampf aus benachbarten Bohrungen gewinnen.

Die thermischen Verfahren sind sehr teuer und deshalb nur in Ausnahmefällen wirtschaftlich. Zur Beurteilung der Zweckmäßigkeit eines solchen Verfahrens muß man wissen, wie der Prozeß abläuft, insbesondere, wie das Temperaturfeld sich örtlich und zeitlich ausbildet. Wichtig ist auch die Frage, welcher Bruchteil der eingebrachten Wärme in Nachbarschichten, die kein Öl enthalten, abströmt und deshalb für die erstrebte Wirkung verloren geht.

In der vorliegenden Arbeit wird die Wirkung des Eindrückens von heißem Wasser theoretisch behandelt, wobei berücksichtigt wird, daß das Öl sich in der Regel in einer porösen Sand- oder Steinschicht befindet. Das Erdöllager kann sehr verschieden gestaltet sein, es kann mehr oder weniger schräg liegen und auch die Poren können nach Größe und Gestalt von Ort zu Ort stark wechseln. Es ist daher notwendig, über die geometrische Gestalt des ganzen Feldes und seiner Poren sowie auch der darüber und darunter befindlichen für das Öl undurchdringlichen Schichten vereinfachende Annahmen derart zu treffen, daß damit das Wesentliche des Vorgangs klar erfaßt wird. Unter Benutzung bekannter Ergebnisse über die Strömung in porösen Schichten und

der Gesetze der Wärmeübertragung werden die maßgebenden Differentialgleichungen des Vorganges aufgestellt. Ihre Lösung und ihre Anwendung auf ein Zahlenbeispiel vermitteln wesentliche Einblicke in den Vorgang der Erwärmung des Ölfeldes.

2. Annahmen für die Entwicklung der Theorie

Wie schon angedeutet, erfordern die in Wirklichkeit vorhandenen und von Fall zu Fall sehr verschiedenen Unregelmäßigkeiten in der Gestalt des Ölfeldes und der es nach oben und unten begrenzenden Schichten sowie in der Porosität des Gesteins geometrische Vereinfachungen, die wie folgt getroffen werden sollen:

1. Das Ölfeld bildet eine horizontale Schicht überall gleicher Höhe. Darüber und darunter befinden sich undurchdringliche Schichten, die beide dieselbe Wärmeleitfähigkeit haben und als unendlich ausgedehnt angesehen werden.
2. Die Porosität habe an allen Stellen des Ölfeldes denselben Wert. Auch sollen alle Poren zu demselben Bruchteil mit Öl und evtl. mit von Anfang an vorhandenem Wasser angefüllt sein. Dem später eindringenden warmen Wasser soll also in allen Poren derselbe freie Raum zur Verfügung stehen. Die Bewegung des Öls soll vernachlässigt werden, d. h. Stein und Öl sollen wie ein einheitlicher fester Körper behandelt werden.
3. Im gesamten Ölfeld sollen die physikalischen Eigenschaften, insbesondere die Wärmeleitzahl konstant sein, ebenso die Wärmeübergangszahl zwischen dem eingepreßten Wasser und dem Gestein.

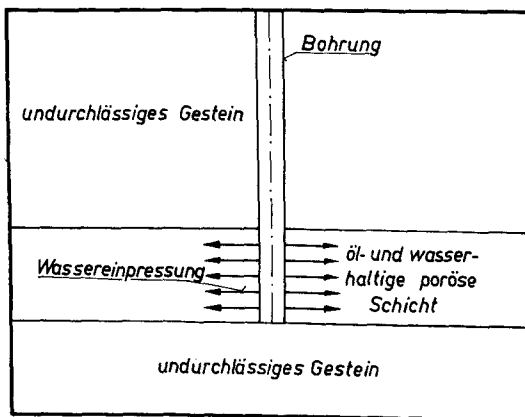


Abb. 1. Schematische und vereinfachte Darstellung eines Ölfeldes in der Umgebung einer Bohrung.

Abb. 1 zeigt eine schematische Darstellung eines Ölfeldes in der Umgebung eines Bohrlochs.

Damit die Rechnung nicht zu verwickelt wird, soll zunächst der ebene Fall behandelt werden, in dem das erwärmte Wasser statt durch eine Bohrung gedanklich durch einen senkrechten ebenen Spalt zugeführt wird. Es tritt dann nur eine Strömungsrichtung auf und nur zwei Ortskoordinaten, von

denen eine der Strömungsrichtung gleichgerichtet ist und die zweite senkrecht verläuft. Erst später wird der zylindrische Fall behandelt, in dem das Temperaturfeld um eine Bohrung untersucht wird.

Der Einfluß der Wärmeleitung in Strömungsrichtung und des Widerstandes zwischen Wasser und Gestein wird untersucht, wobei sich zeigt, daß dessen Vernachlässigung in den meisten Fällen nur geringe Fehler verursacht. Dagegen kann der Wärmeverlust an die angrenzenden undurchlässigen Schichten sehr bedeutend sein.

3. Die Wärmetransportmechanismen

3.1. Übersicht über die Transportmechanismen

Für den Wärmetransport im Ölfeld sind fünf Vorgänge maßgebend.

1. Mitführen von Enthalpie durch das strömende Wasser.
2. Wärmeübertragung vom Wasser an das Öl und Gestein.
3. Wärmeleitung im Gestein und Öl.
4. Wärmeleitung im Wasser.
5. Konvektiver Transport im Wasser durch Längs- und Quervermischung.

Während das Mitführen von Enthalpie durch das strömende Wasser sowie die Wärmeleitung im Wasser und im Gestein keiner besonderen Erläuterung bedürfen, sollen die für die konvektive Längs- und Quervermischung verwendbaren Beziehungen kurz zusammengestellt und die für die Wärmeübertragung vom Wasser an das Gestein notwendigen Gleichungen hergeleitet werden.

3.2. Wärmetransport durch Längs- und Quervermischung

Wenn eine Flüssigkeit durch eine Schüttung oder durch poröses Material fließt, vermischen sich beim Umströmen der Festkörper die einzelnen Stromfäden. Die Fäden können außerdem zeitlich und räumlich recht unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten haben. Sind im Strömungsfeld Temperaturgradienten vorhanden, so ergeben diese Vorgänge einen Wärmetransport, den man gewöhnlich durch effektive Wärmeleitzahlen erfaßt.

Für die Vermischung quer zur Strömungsrichtung in Schüttungen hat *E. U. Schlünder* [27] eine elegante theoretische Betrachtung angestellt, die zu folgender Gleichung führt:

$$\lambda_{wq} = \frac{1}{8} v \cdot d c_w + \lambda_w \quad (1)$$

Darin ist λ_{wq} die effektive Wärmeleitzahl für den konvektiven Wärmetransport quer zur Strömungsrichtung einschließlich der Wärmeleitung, λ_w die Wärmeleitfähigkeit des Wassers, v die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers, d die Größe der Teilchen einer Schüttung, c_w die auf das Volumen bezogene spezifische Wärme des Wassers und ε das relative, durch strömendes Wasser ausgefüllte Porenvolumen. Gl. (1) ist durch zahlreiche ältere und neuere Messungen bestätigt.

Für die Anwendung von Gl. (1) auf poröse Körper ist es besser, statt des Korndurchmessers d den hydraulischen Durchmesser d_h zu verwenden. Es gilt

$$d_h = \frac{4 \cdot \varepsilon \cdot \Delta V}{\Delta F} \quad (2)$$

mit ΔV als einem Volumenelement und ΔF als der darin befindlichen Fläche. Für eine Schüttung aus Kugeln gleicher Größe wird dann

$$\lambda_{wq} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} v d_h c_w + \lambda_w. \quad (3)$$

Diese Beziehung ist für isotrope poröse Körper angenähert anwendbar.

Für die konvektive Längsvermischung ist eine einfache theoretische Analyse nicht bekannt. Eine Reihe von experimentellen Untersuchungen [5, 6, 11, 19] ergeben

$$\lambda_{wl} = f(\text{Re}) \cdot v d c_w + \lambda_w, \quad (4)$$

worin Re die Reynoldssche Kennzahl bedeutet. Die Abhängigkeit von der Reynoldsschen Kennzahl ist gering. Im Mittel gilt

$$\lambda_{wl} = 1,7 v d c_w + \lambda_w.$$

Führt man auch hier wieder den hydraulischen Durchmesser ein, so wird

$$\lambda_{wl} = 2,5 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} v d_h c_w + \lambda_w. \quad (5)$$

Die Längsvermischung ist also etwa 13mal so intensiv wie die Quervermischung.

3.2. Wärmeübertragung vom Wasser an das Öl und Gestein

Der Wärmeübertragung vom fließenden Wasser an das ruhende Öl und Gestein steht nicht nur der Wärmewiderstand der Strömungsgrenzschicht, sondern darüber hinaus der Widerstand des Öls und Gesteins entgegen. Ähnliche Bedingungen herrschen häufig in Regeneratoren. Hierfür sind die Vorgänge von *H. Hausen* untersucht worden und in seinem Buch „Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom“ [15] dargestellt. Im vorliegenden Fall ergeben sich Unterschiede, da die Entwicklung des Temperaturfeldes hier nicht periodisch verläuft.

Für den Wärmeübergang durch die Strömungsgrenzschicht sei ein Wärmeübergangskoeffizient α maßgebend, den man näherungsweise aus Beziehungen berechnen kann, die für Schüttungen gelten (s. z. B. [9]).

Zur Berücksichtigung des Feststoffwiderstandes soll eine einfache Näherungsgleichung hergeleitet werden.

Zu diesem Zweck wird ein Volumenelement ΔV des porösen Gebietes betrachtet, in dem die Porenoberfläche die Größe ΔF habe. In der Zeit dt wird dann die Wärme

$$dQ = \Delta F \cdot k (\vartheta_w - \vartheta_g) dt \quad (6)$$

vom Wasser mit der Temperatur ϑ_w an das Gestein und Öl übertragen, dessen gemeinsame mittlere Temperatur ϑ_g sei. k bedeutet dann einen auf die Oberfläche ΔF bezogenen Wärmedurchgangskoeffizienten. Die übertragene Wärme erhöht die Temperatur von Öl und Gestein entsprechend der Gleichung

$$dQ = \Delta V (1 - \varepsilon) \cdot c_g d\vartheta_g, \quad (7)$$

wenn c_g die auf die Volumeneinheit bezogene mittlere spezifische Wärme von Öl und Gestein ist.

Der Wärmedurchgangskoeffizient k ist bei genauer Rechnung eine Funktion der Zeit. Für die vorliegende Betrachtung soll aber ein konstanter Mittelwert eingesetzt werden. Dann ergibt sich aus Gl. (6) und (7) z. B. der zeitliche Verlauf von ϑ_g bei vorgegebener Abhängigkeit $\vartheta_w(t)$ zu

$$\vartheta_g = \vartheta_{g0} e^{-\frac{\Delta F k}{\Delta V (1-\varepsilon) c_g} t} + \frac{\Delta F k}{\Delta V (1-\varepsilon) c_g} \int_0^t \vartheta_w(z) e^{-\frac{\Delta F k}{\Delta V (1-\varepsilon) c_g} (t-z)} dz, \quad (8)$$

wobei ϑ_{g0} die Temperatur ist, die Öl und Gestein zur Zeit Null haben, und z die laufende Zeitkoordinate.

Grundsätzlich ist es denkbar, für den Erwärmungsvorgang eine exakte Lösung durch Integration der Fourierschen Differentialgleichung zu gewinnen, die den Wärmetransport durch Leitung in einem Sandkörnchen und im Öl genau beschreibt. Die dabei berechnete örtliche gemittelte Temperatur sei mit ϑ_{gex} bezeichnet. Den zeitlichen Verlauf der Temperaturen kann man sich etwa so vorstellen, wie er in Abb. 2 gezeigt ist. Dort ist die Näherungslösung nach Gl. (8) für einen bestimmten Wert von k und die gedachte exakte Lösung skizziert, wobei in diesem Beispiel ϑ_w konstant gehalten ist. Es gilt nun, k so zu bestimmen, daß beide Lösungen möglichst gut übereinstimmen. Ein plausibler und einfacher Ansatz ist, k so zu wählen, daß das Integral über alle Abweichungen $\vartheta_g - \vartheta_{gex}$ verschwindet:

$$\int_0^\infty (\vartheta_g - \vartheta_{gex}) dt = 0. \quad (9)$$

Zwar lassen sich auch andere Bedingungen angeben, insbesondere die, daß das Integral über alle Quadrate der Abweichungen zum Minimum wird. Aber das Ergebnis aus einem solchen Ansatz wird erheblich komplizierter als das Ergebnis, welches Gl. (9) liefert. Zudem ist es fraglich, ob es wesentlich genauer wäre.

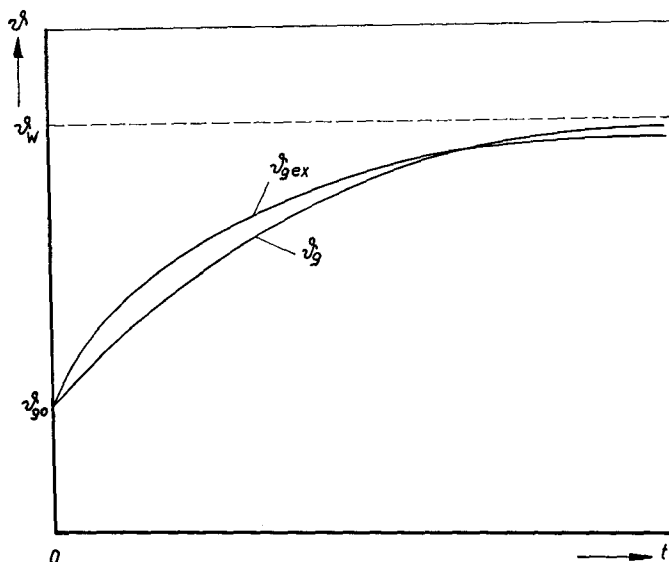


Abb. 2. Skizze des zeitlichen Verlaufs eines Körpers bei Erwärmung. ϑ_{gex} ist die Temperatur nach der exakten Lösung, ϑ_g nach der einfachen Näherung Gl. (8).

Wenn man die Temperatur der Oberfläche zwischen dem porösen Material und dem Wasser, die von der mittleren Temperatur ϑ_g verschieden ist, mit ϑ_a bezeichnet, läßt sich Gl. (9) wie folgt zerlegen:

$$\int_0^{\infty} (\vartheta_g - \vartheta_w) dt - \int_0^{\infty} (\vartheta_{gex} - \vartheta_a) dt - \int_0^{\infty} (\vartheta_a - \vartheta_w) dt = 0. \quad (10)$$

Im allgemeinen ist ϑ_a als ein Mittelwert anzusehen, der über die Oberfläche eines Porenraumes gebildet ist. Unter Berücksichtigung von Gl. (6) und (7) und der Gl. (6) entsprechenden Beziehung für den Wärmeübergang erhält man hieraus

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{\Delta F}{\Delta V (1 - \varepsilon) c_g} \frac{1}{\vartheta_{w\infty} - \vartheta_{g0}} \int_0^{\infty} (\vartheta_a - \vartheta_{gex}) dt. \quad (11)$$

Dabei ist $\vartheta_{w\infty}$ die Wassertemperatur nach unendlich langer Zeit. Diese Gleichung zerlegt den gesamten Wärmewiderstand $\frac{1}{k}$ in einen Wärmeübergangswiderstand $\frac{1}{\alpha}$ und einen zusätzlichen Betrag, den man als den Widerstand des festen Materials ansehen kann. Im folgenden wird gezeigt, daß sich in gewissen einfachen Fällen der Widerstand des festen Materials als unabhängig von α ergibt und nur von geometrischen Bedingungen und von der Wärmeleitzahl des festen Materials abhängt. Um diesen Widerstand zu erhalten, muß man das Integral in Gl. (11) lösen. Dies gelingt nur in geometrisch einfachen Fällen, z. B. wenn man sich das poröse Material als eine Kugelschüttung

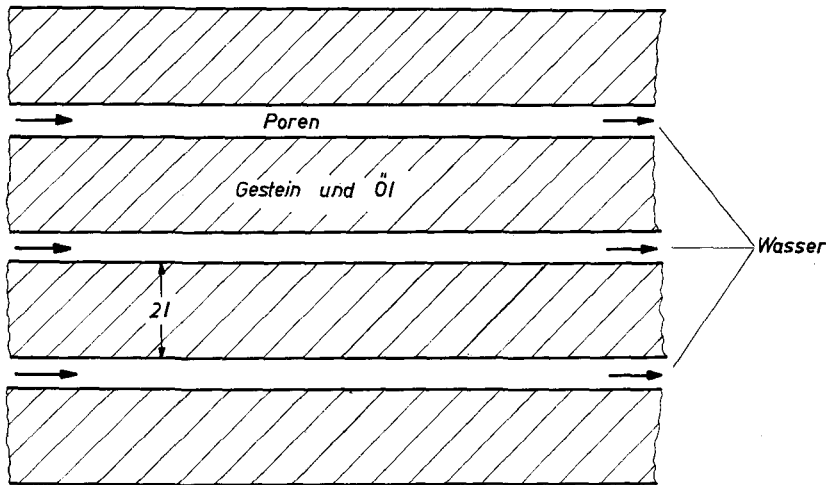


Abb. 3. Grob angenäherte Darstellung des porösen Materials als eine Schichtung aus ebenen Platten der Dicke $2l$.

vorstellt oder als eine Schichtung aus Zylindern, oder auch so, daß die Porenebene Spalte sind, deren Breite die Größenordnung des mittleren Porendurchmessers hat. Für dieses besonders einfache Beispiel, das in Abb. 3 skizziert ist, soll die Integration zunächst durchgeführt werden.

Die Temperaturveränderungen in Strömungsrichtung sollen dabei vernachlässigt werden, so daß sich der Vorgang auf den Fall einer eindimensionalen instationären Wärmeleitung vereinfacht. Hierfür gilt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = \frac{c_g}{\lambda_g} \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \quad (12)$$

wenn x die von der Mitte der Platte gemessene Ortskoordinate und ϑ die von x und t abhängige Temperatur ist. Es gelingt, durch mehrfache Integration von Gl. (12) zwischen geeigneten Grenzen direkt das in Gl. (11) gesuchte Integral zu ermitteln. Dabei muß für ϑ_w nur vorausgesetzt werden, daß es für sehr große Zeiten einen endlichen Wert annimmt. Gl. (12) ist wie folgt zu integrieren:

$$\int_{s=0}^l \int_{z=l}^s \int_{x=0}^z \int_{t=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{c_g}{\lambda_g} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right] dt dx dz ds = 0.$$

Darin bedeuten z und s ebenso wie x die laufende Ortskoordinate. Das Ergebnis der Integration ist einfach

$$\int_0^{\infty} (\vartheta_a - \vartheta_{gex}) dt = \frac{1}{3} \frac{c_g}{\lambda_g} l^3 (\vartheta_{w\infty} - \vartheta_{g0}). \quad (13)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist gerade das Integral in Gl. (11). Durch Einsetzen erhält man, wenn außerdem berücksichtigt wird, daß bei der ebenen Platte $\Delta V (1 - \varepsilon) = l \Delta F$ ist, die Beziehung

$$\frac{l}{k} = \frac{l}{\alpha} + \frac{l}{3} \frac{l}{\lambda_g}. \quad (14)$$

Diese Gleichung bedeutet, daß der Widerstand, den das feste Material dem Eindringen von Wärme entgegensetzt, $\frac{1}{3} \frac{l}{\lambda_g}$ ist, wenn man sich das poröse Material als eine Schichtung aus Platten von der Dicke $2l$ vorstellt. Gl. (14) gilt für die Abkühlung und Erwärmung ebener Platten allgemein und nicht nur, wenn sie Teile eines porösen Materials sind.

Eine entsprechende Rechnung für Zylinderschichtungen liefert

$$\frac{l}{k} = \frac{l}{\alpha} + \frac{l}{4} \frac{R}{\lambda_g}, \quad (15)$$

wenn R der Zylinderradius ist. Für Kugelschüttungen erhält man

$$\frac{1}{k} = \frac{l}{\alpha} + \frac{1}{5} \frac{R}{\lambda_g} \quad (16)$$

mit R als Kugelradius.

Die Gln. (14), (15) und (16) stimmen mit Gl. (514) des schon erwähnten Buches von *H. Hausen* [15] überein, wenn man von den Gln. (471), (471 a) und (471 b) jeweils nur das erste Glied benutzt, d. h. die sehr schnellen Temperaturänderungen im Regenerator nach dem Umschalten vernachlässigt.

Setzt man eine der Gln. (14) bis (16) in Gl. (8) ein, so erhält man eine Näherungslösung für die Abkühlung oder Erwärmung einer ebenen Platte, eines Zylinders oder einer Kugel. Ein Vergleich dieser Näherungslösungen mit den zugehörigen exakten Lösungen zeigt, mit welchen Fehlern man bei der Verwendung der Gln. (14) bis (16) zu rechnen hat. Abb. 4 bietet einen solchen Vergleich für den Fall der ebenen Platte. Hier ist ϑ_w konstant gesetzt. Die exakte Lösung findet man in vielen Lehrbüchern, z. B. bei *U. Grigull* [13]. Es ist nicht überraschend, daß der Fehler der Näherung dann am größten ist, wenn α unendlich groß ist, weil dann der Widerstand der Wärmeübertragung allein in der Platte liegt. Aber auch in diesem Fall überschreitet der Fehler nicht 11 % der ursprünglichen Temperaturdifferenz. Kommt der Wärmeübergangswiderstand an der Plattenoberfläche in die gleiche Größenordnung wie der Wärmeleitwiderstand, so wird die Näherung erheblich genauer. Ein entsprechender Vergleich für den Zylinder und für die Kugel zeigt grundsätzlich das gleiche Verhalten. Beim Zylinder wird der größte Fehler 15 % der anfänglichen Temperaturdifferenz und bei der Kugel etwa 17 %. Diese Werte sind schon ziemlich groß, aber sie treten nur bei unendlich großer Wärmeübergangszahl α auf. Auch sollen die Gleichungen (14) bis (16) nicht ver-

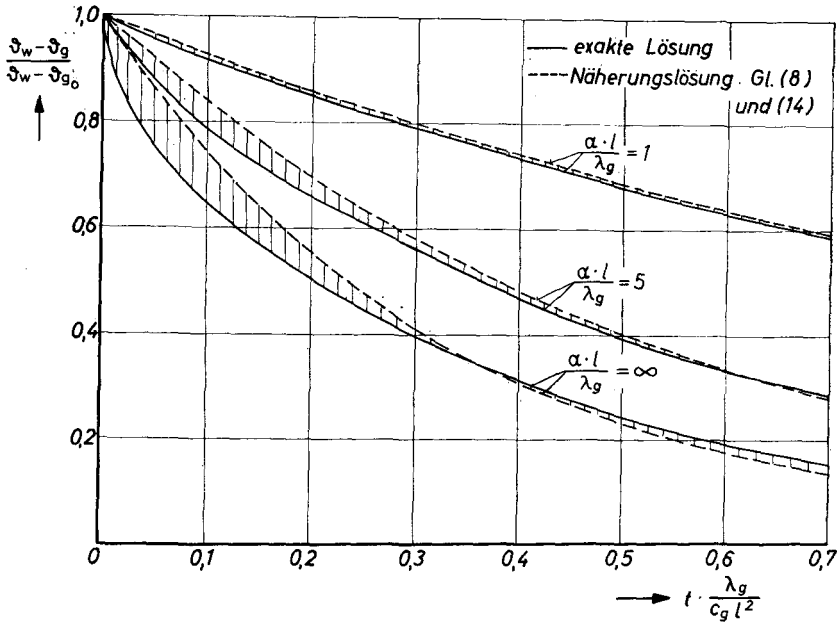


Abb. 4. Vergleich der Näherungslösung nach Gl. (8) und Gl. (14) für die Erwärmung einer ebenen Platte mit der exakten Lösung. Die Fehler sind durch Schraffur hervorgehoben. ----- Näherungslösung, ————— exakte Lösung.

wendet werden, um die Abkühlung einer ebenen Platte, eines Zylinders oder einer Kugel zu berechnen — dazu verwendet man besser die exakten Lösungen oder genauere Näherungen — sondern um instationäre Wärmeübertragungsvorgänge in Fällen zu behandeln, in denen Platte, Zylinder oder Kugel häufig nur in grober Näherung die Elemente des gesamten Systems repräsentieren, für das eine exakte Lösung viel zu verwickelt wäre und darüber hinaus ohnehin ungenaue Annahmen getroffen werden müssen.

Unter diesen Umständen ist es zweckmäßig, an Stelle der drei Gln. (14) bis (16) eine einzige zu verwenden, die sozusagen eine mittlere Gesetzmäßigkeit wiedergibt. Bedenkt man, daß das Modell der Plattenschichtung für ein Ölfeld ziemlich unrealistisch ist, so scheidet Gl. (14) praktisch aus — sie wird in anderem Zusammenhang noch benötigt — und es sind nur Gl. (15) und (16) durch eine mittlere Beziehung wiederzugeben. Dazu wird in ihnen der Radius jeweils durch den hydraulischen Durchmesser der Poren ersetzt. Man erhält für die Zylinderpackung an Stelle von Gl. (15)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{8} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{d_h}{\lambda_g} \quad (17)$$

und für die Kugelschüttung an Stelle von Gl. (16)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{3}{20} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{d_h}{\lambda_g} \quad (18)$$

Als Mittelwert gilt etwa

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + 0,14 \frac{1 - \varepsilon d_h}{\varepsilon \lambda_g}.$$

Gl. (17) und (18) weichen hiervon um maximal 10 % ab.

Diese Genauigkeit ist für praktische Zwecke ausreichend, wenn man bedenkt, daß der hydraulische Durchmesser der Poren, den man sich etwa als deren mittleren Durchmesser vorstellen kann, selten genauer als auf 10 % bekannt ist. Die Zylinderpackung und die Packung aus Kugeln gleichen Durchmessers sind aber bei weitem nicht die einzigen denkbaren Modelle für ein poröses Material. Es ist möglich, daß für andere Modelle sich wesentlich andere Beziehungen ergeben als in Gl. (17) und (18). Deswegen soll zur Kontrolle der Fall behandelt werden, daß das poröse Material aus Kugeln verschiedenen Durchmessers besteht.

Bezeichnet man mit n_i die Anzahl der Kugeln mit dem Radius R_i pro Volumeneinheit des porösen Materials, so ist dessen Porosität

$$\varepsilon = 1 - \frac{4}{3} \pi \sum n_i R_i^3, \quad (19)$$

wobei die Summe über alle vorkommenden Radien zu erstrecken ist. Der hydraulische Durchmesser des Porenvolumens ist

$$d_h = \frac{\varepsilon}{\pi \sum n_i R_i^2}. \quad (20)$$

Für den Wärmedurchgangskoeffizienten an einer einzelnen Kugel gilt nach Gl. (16):

$$\frac{1}{k_i} = \frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{5} \frac{R_i}{\lambda_g}, \quad (21)$$

wobei α_i der an der betrachteten Kugel wirkende Wärmeübergangskoeffizient ist. Es ist angenommen, daß er für gleiche Radien R_i den gleichen Wert hat. Die über alle Kugeln gemittelte Wärmedurchgangszahl k ergibt sich aus

$$k \sum 4 \pi R_i^2 n_i = \sum 4 \pi k_i R_i^2 n_i$$

zu

$$\frac{1}{k} = \frac{\sum n_i R_i^2}{\sum n_i k_i R_i^2}.$$

Setzt man Gl. (21) in die letzte Gleichung ein, so erhält man

$$\frac{1}{k} = \frac{\sum n_i R_i^2}{5 \sum n_i R_i^2 \frac{\lambda_g \alpha_i}{5 \lambda_g + \alpha_i R_i}}. \quad (22)$$

Nun kommt man nur weiter, wenn man einen Ansatz für α_i macht. Eine Annahme, die gleichzeitig die Rechnung sehr vereinfacht und plausibel ist, ist die, daß das Produkt $\alpha_i R_i$ für jede Kugel gleich ist. Dies bedeutet, daß die Nußeltsche Kennzahl an jeder Kugel den gleichen Wert hat. Schreibt man zur Abkürzung

$$\alpha_i R_i = K ,$$

so wird aus Gl. (22)

$$\frac{1}{k} = \frac{\sum n_i R_i^2}{\sum n_i R_i} \left[\frac{1}{K} + \frac{1}{5 \lambda_g} \right] . \quad (23)$$

Definiert man eine mittlere Wärmeübergangszahl α durch

$$\alpha \sum 4 \pi R_i^2 n_i = \sum 4 \pi \alpha_i R_i^2 n_i ,$$

so erhält man aus Gl. (23) schließlich

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{5 \lambda_g} \frac{\sum n_i R_i^2}{\sum n_i R_i} . \quad (24)$$

Diese Gleichung, die den Gln. (17) und (18) entspricht, läßt sich nur auswerten, wenn die Verteilung n_i bekannt ist. Sie zeigt aber auch schon so, daß auch bei Schüttungen aus Kugeln verschiedenen Durchmessers der Widerstand des festen Materials unabhängig von der mittleren Wärmeübergangszahl α ist, wenn man wie oben voraussetzt, daß die Nußeltsche Kennzahl für alle Kugeln gleich ist. Denn das Verhältnis der beiden Summen in Gl. (24) ist eine rein geometrisch bestimmte Größe. Um dieses Verhältnis für ein Beispiel auszurechnen, soll eine bestimmte Verteilung angenommen werden. Dabei ist es für die Rechnung einfacher, die Summen durch Integrale zu ersetzen, indem man schreibt

$$\frac{\sum n_i R_i^2}{\sum n_i R_i} = \frac{\int_0^{R_{\max}} R^2 f(R) dR}{\int_0^{R_{\max}} R f(R) dR} , \quad (25)$$

worin $f(R)$ die Verteilungsfunktion ist und R_{\max} der größte vorkommende Kugelradius. Für die Verteilungsfunktion kann man eine kubische Parabel annehmen, wie sie in Abb. 5 dargestellt ist. Auch andere Verteilungen sind denkbar. Aber die kubische Parabel ist besonders leicht zu integrieren und kommt der wirklichen Verteilung wahrscheinlich ebenso nahe wie z. B. die Gaußsche Verteilung.

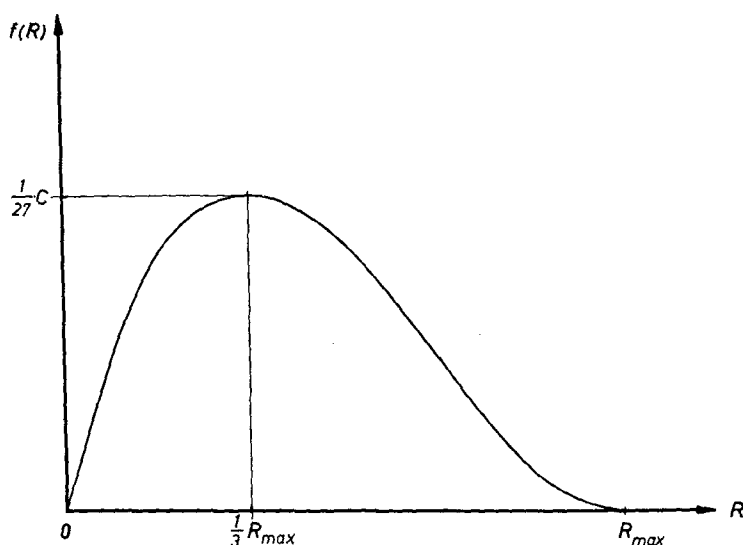


Abb. 5. Angenommene Verteilungsfunktion $f(R)$ für die Radien R der Kugeln einer Kugelschüttung.

Ihre Gleichung hat die Form:

$$f(R) = C \left[\frac{R}{R_{\max}} - 2 \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^2 + \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^3 \right], \quad (26)$$

wobei C eine Konstante ist, die in Gl. (25) wieder herausfällt und deren Wert daher hier nicht interessiert. Setzt man Gl. (26) in Gl. (25) ein, so erhält man:

$$\frac{\sum n_i R_i^2}{\sum n_i R_i} = R_{\max} \cdot \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Es ist weiter zweckmäßig, R_{\max} durch den hydraulischen Durchmesser der Poren und die Porosität auszudrücken. Das ist mit Hilfe von Gl. (19) und Gl. (20) möglich. Es ergibt sich nach einiger Rechnung

$$R_{\max} = \frac{21}{16} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} d_h.$$

Hiermit und mit Gl. (27) erhält man schließlich aus Gl. (24)

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{21}{160} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{d_h}{\lambda_g}. \quad (28)$$

Der Koeffizient $\frac{21}{160}$ dieser Gleichung liegt zwischen den entsprechenden Koeffizienten für die Schichtung aus Zylindern gleichen Durchmessers und

für die Schüttung aus Kugeln gleichen Durchmessers. Eine der eben beschriebenen analoge Rechnung für Zylinder verschiedenen Durchmessers ergibt

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + \frac{9}{80} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{d_h}{\lambda_g}.$$

Dies Ergebnis liegt nur wenig unter dem für Zylinder gleichen Durchmessers. Der Ansatz, für beliebige poröse Materialien einen mittleren Widerstand einzusetzen, ist damit gerechtfertigt, so daß schließlich der mittlere effektive Wärmeübergangskoeffizient k für beliebiges poröses Material mit einem Fehler von weniger als 15 % aus der Gleichung

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha} + 0,13 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{d_h}{\lambda_g} \quad (29)$$

errechnet werden kann.

Gl. (29) gilt übrigens mit ebenso guter Näherung auch für Regenerator-schüttungen und, wenn man analoge Größen einsetzt, für den Stoffübergang.

Um Gl. (29) unmittelbar auf die Berechnung der Temperaturfelder in porösen Stoffen anwenden zu können, verwendet man zweckmäßigerweise die auf die Volumeneinheit bezogene effektive Wärmeübergangszahl

$$k_v = k \frac{\Delta F}{\Delta V}.$$

Damit erhält man schließlich

$$\frac{1}{k_v} = \frac{d_h}{4 \varepsilon} \left[\frac{1}{\alpha} + 0,13 \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{d_h}{\lambda_g} \right]. \quad (30)$$

Hiernach läßt sich die auf die Volumeneinheit des porösen Materials bezogene effektive Wärmeübergangszahl k_v berechnen, wenn die Wärmeübergangszahl α für den Wärmeübergang vom Wasser an das Gestein und Öl bekannt ist und außerdem die Porosität ε , der hydraulische Durchmesser des Porenvolumens d_h und die mittlere Wärmeleitfähigkeit λ_g von Gestein und Öl.

4. Das Temperaturfeld

4.1. Bisherige Untersuchungen

Die physikalischen Vorgänge, die der Ausbildung des Temperaturfeldes in einer unterirdischen Ölschicht zugrundeliegen, sind denen sehr ähnlich, die sich in Regeneratoren oder Festbettreaktoren abspielen. Es gibt daher neben einigen Veröffentlichungen über den Temperaturverlauf in Ölfeldern eine ganze Reihe von Untersuchungen, die im Hinblick auf die Anwendung in durchströmten Schüttungen durchgeführt wurden, deren Berechnungsverfahren und Ergebnisse aber auch im vorliegenden Fall von Interesse sind.

Im Jahre 1926 veröffentlichte *A. Anzelius* [3] die Berechnung des Temperaturverlaufs in einem porösen Prisma, durch das eine Flüssigkeit strömt, deren Eintrittstemperatur von der ursprünglichen Temperatur des porösen Materials abweicht. *Anzelius* vernachlässigte dabei die Wärmeleitung in Strömungsrichtung und nahm an, daß das Prisma keine Wärme nach außen verliert, so daß die Temperatur nur eine Funktion der Koordinate in Längsrichtung und der Zeit wird. Für den Wärmeübergang von der strömenden Flüssigkeit an das feste Material setzte er einen von Zeit und Ort unabhängigen Wärmeübergangskoeffizienten an, der in seiner Bedeutung dem effektiven Wärmeübergangskoeffizienten k dieser Arbeit entspricht. Die Gleichungen von *Anzelius* könnten als Lösungen des hier zu untersuchenden Problems angesehen werden, wenn es zulässig wäre, die Wärmeleitung in Strömungsrichtung und die Wärmeverluste aus der porösen Schicht an die Nachbarschichten zu vernachlässigen. Auch *W. Nußelt* [22] und *T. E. W. Schumann* [29] haben die gleiche Frage wie *Anzelius* untersucht. *Nußelt* gab allerdings eine allgemeinere Lösung an, in der die Anfangsbedingungen noch nicht eingesetzt sind. *H. Hausen* [14] entwickelte im Zusammenhang mit Berechnungen von Regeneratoren ein zeichnerisches Lösungsverfahren, das auf einer Umwandlung der Differentialgleichung in eine Differenzengleichung beruht und, solange man noch keine Rechenautomaten zur Verfügung hatte, wesentlich schneller war als die numerische Auswertung der komplizierten analytischen Beziehungen. Ergebnisse einer zeichnerischen Lösung des von *Anzelius* behandelten Problems finden sich bei *H. Hausen* [15] S. 336. *A. Klinkenberg* [17] wertete die Gleichungen von *Schumann* numerisch aus und stellte die Ergebnisse mit Hilfe von Nomogrammen dar.

Der Temperaturverlauf in Kreuzstromwärmeaustauschern folgt unter gewissen Voraussetzungen im stationären Zustand den gleichen Gesetzmäßigkeiten wie der hier betrachtete Vorgang, wenn man die dimensionslose Zeitkoordinate durch eine dimensionslose Ortskoordinate ersetzt. Beziehungen für den Temperaturverlauf in Kreuzstromwärmeaustauschern, wie sie z. B. von *W. Nußelt* [21, 23] entwickelt wurden, lassen sich daher leicht auf den vorliegenden Fall übertragen. Aber auch hier ist die Wärmeleitung in Strömungsrichtung nicht berücksichtigt.

Der Fall, daß die Wärmeleitung in Strömungsrichtung berücksichtigt wird, aber die effektive Wärmeübergangszahl als unendlich groß angesetzt ist, wurde von *R. Jenkins* und *J. S. Aronofsky* [16] behandelt. Dabei ist wiederum die Wärmeableitung in die Nachbarschichten nicht mit in Betracht gezogen. *Ch. L. Carney Jr.* und *R. P. Gilbert* [7] schließlich berücksichtigen sowohl die Wärmeleitung in Strömungsrichtung als auch einen endlichen Wert der effektiven Wärmeübergangszahl k , geben aber nur ein iteratives Verfahren zur Bestimmung des Temperaturfeldes an.

In praktischen Fällen kann die Wärmeableitung aus der porösen Schicht in die Nachbarschichten sehr wesentlich werden. *H. A. Lauwerier* [18] untersuchte diese Frage, wobei er die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigte und die effektive Wärmeübergangszahl k_v als unendlich groß ansah. Solch eine Annahme ist sinnvoll, wenn das poröse Material aus sehr kleinen Teilchen aufgebaut ist. Dann wird, wie Gl. (29) zeigt, k_v selbst bei

kleinen Werten der Wärmeleitzahl λ_g sehr groß. *Lauwerier* setzte außerdem die Wärmeleitzahl quer zur Strömungsrichtung in der porösen Schicht als unendlich groß an. Dieser Ansatz ist nur bei sehr kleiner Schichtdicke zulässig. In praktischen Fällen verursacht er, wie in dieser Arbeit gezeigt wird, häufig größere Fehler.

Auch *J. W. Marx* und *R. H. Langenheim* [20] ermittelten das Temperaturfeld unter den gleichen Voraussetzungen wie *Lauwerier*. Zusätzlich setzten sie aber an, daß der Temperaturverlauf in der ölführenden Schicht durch eine einfache Sprungfunktion gegeben ist, derart, daß stromabwärts vom Sprung die ursprüngliche Temperatur herrscht, stromaufwärts die Temperatur des eintretenden Wassers. Mit dieser Voraussetzung ergibt die Wärmebilanz, daß der Sprung sich langsamer fortbewegt als im Fall, daß keine Wärme an die Nachbarschichten verloren wird. Dies ist aber, wie z. B. die Lösung von *Lauwerier* zeigt, nicht richtig. Trotzdem ist das recht einfache Ergebnis von *Marx* und *Langenheim* wahrscheinlich geeignet, den Wärmeverlust in die Nachbarschichten abzuschätzen.

N. R. Amundson hat die Ausbildung des Temperaturfeldes in durchströmten Festbettreaktoren untersucht [1, 2]. Amundson berücksichtigte alle Wärmeübergangsvorgänge, die auch in der vorliegenden Arbeit wesentlich sind: die Wärmeleitung in Strömungsrichtung und quer dazu, den Wärmewiderstand zwischen der strömenden Flüssigkeit und den festen Körpern, die Wärmeleitung in den einzelnen Körpern der Schüttung und auch Wärmeableitung aus dem Reaktor nach außen. Der Unterschied zu dem vorliegenden Problem besteht darin, daß bei Amundson für den Wärmeverlust des Reaktors eine einfache Wärmeübergangsbedingung maßgebend ist, während der Wärmeverlust aus der ölführenden Schicht durch einen instationären Wärmeleitvorgang in den Nachbarschichten bestimmt ist. Die Ergebnisse für Reaktoren lassen sich daher nicht auf das Problem dieser Arbeit übertragen.

4.2. Allgemeine Lösung

4.2.1. Vorbetrachtungen

Eine exakte Lösung des Problems, die alle Einflüsse voll erfaßt, wird außerordentlich verwickelt, selbst wenn man die in Abschnitt 2 geschilderten Vereinfachungen einführt. Die mathematische Formulierung des Vorganges liefert ein System von drei miteinander gekoppelten partiellen Differentialgleichungen. Darin sind die abhängigen Veränderlichen die Temperatur des Wassers in der porösen Schicht, die Temperatur des Gesteins in der porösen Schicht und die Temperatur der Nachbarschichten. Unabhängige Veränderliche sind die Zeit und zwei Ortskoordinaten, z. B. die Entfernung von der Oberfläche der Bohrung und die Entfernung von der Mittelfläche der porösen Schicht.

Die Lösung dieses Gleichungssystems vereinfacht sich außerordentlich, wenn man darauf verzichtet, in der porösen Schicht das Temperaturprofil im Strömungsquerschnitt zu bestimmen und statt dessen unmittelbar die über den Querschnitt gemittelte Temperatur näherungsweise berechnet. Man muß in diesem Fall einen Ansatz über den Wärmeleitwiderstand der porösen Schicht quer zur Strömungsrichtung machen. Setzt man ihn zu null an, so

kommt man auf das Ergebnis von *H. A. Lauwerier*, wenn man auch die übrigen dort getroffenen Annahmen macht. Aber es ist sicherlich besser, einen endlichen Wert für den Wärmeleitwiderstand der Schicht anzunehmen.

Dieser Wärmeleitwiderstand läßt sich auf Grund der Überlegungen auf den Seiten 368 bis 372 ermitteln, die die Erwärmung einer ebenen Platte behandeln. Gl. (14) drückt aus, daß der gesamte Wärmefluss, der dem Wärmefluss an jeder Seite der Platte entgegensteht, sich zusammensetzt aus dem Wärme-

übergangswiderstand $\frac{1}{\alpha}$ und dem Widerstand $\frac{1}{3} \frac{l}{\lambda_g}$ der Platte, wobei l die halbe

Plattendicke und λ_g die Wärmeleitzahl der Platte ist. Man kann die ölführende Schicht in bezug auf die Wärmeleitung quer zur Strömungsrichtung ebenfalls als eine ebene Platte behandeln, deren Wärmewiderstand demnach an jeder Seite zu

$$W = \frac{1}{3} \frac{L}{\lambda_g} \quad (31)$$

angesetzt werden kann, wenn L die halbe Dicke der porösen Schicht und λ_g deren effektive Wärmeleitzahl quer zur Strömungsrichtung ist. Dabei ist zu beachten, daß Gl. (14) nur eine angenäherte Behandlung der Erwärmung oder Abkühlung einer ebenen Platte liefert und daß deshalb die wirkliche mittlere Temperatur der Platte von der mit Gl. (14) ermittelten abweicht, wie es in Abb. 4 gezeigt ist. Deswegen soll später zum Vergleich die exakte Lösung für den verhältnismäßig einfachen Fall entwickelt werden, daß die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigt wird und die effektive Wärmeübergangszahl k_v unendlich groß ist.

4.2.2. Die Differentialgleichungen und ihre Integration

Zur Beschreibung des Vorgangs werden die in Abb. 6 gezeigten Koordinaten eingeführt. x ist die Koordinate quer zur Strömungsrichtung von der Mitte der porösen Schicht aus gerechnet, y die vom Eintritt des Wassers her gerechnete Koordinate in Strömungsrichtung.

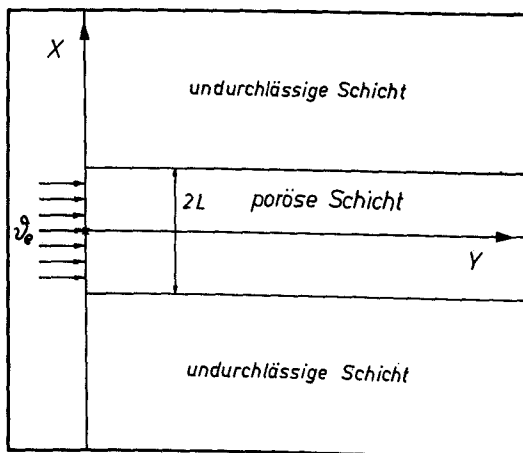


Abb. 6. Die Lage des Koordinatensystems für die Ermittlung der Temperaturfelder.

Das Temperaturfeld in der porösen Schicht wird durch zwei Differentialgleichungen beschrieben, die die Wärmebilanz für das Wasser und für das Gestein ausdrücken. In diesen Gleichungen soll die effektive Wärmeleitung quer zur Strömungsrichtung nach Gl. (31) berücksichtigt werden. Strenggenommen müßte in beiden Differentialgleichungen ein solcher Wärmeleitungsbeitrag erscheinen. Zur Vereinfachung soll aber die Leitung im Gestein vernachlässigt werden und statt dessen für das Wasser eine effektive Wärmeleitzahl eingesetzt werden, die beides erfaßt und sich daher aus

$$\lambda_q = \varepsilon \lambda_{wq} + (1 - \varepsilon) \lambda_g \quad (32)$$

ergibt. Ebenso wird die Wärmeleitung in Strömungsrichtung im Gestein vernachlässigt und statt dessen für das Wasser

$$\lambda_l = \varepsilon \lambda_{wl} + (1 - \varepsilon) \lambda_g \quad (33)$$

eingeführt.

Für die weitere Rechnung ist es zweckmäßig, folgende dimensionslose Größen zu verwenden:

$$\eta = \frac{\lambda_q}{v c_w \varepsilon L} \frac{y}{L},$$

$$\xi = \frac{|x| - L}{L} \sqrt{\frac{\lambda_q c_2}{\lambda_2 c_1}}, \quad \text{für } |x| \geq L$$

$$\tau = t \frac{\lambda_q}{L^2 c_1},$$

$$\Theta = \frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_e - \vartheta_0},$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_q c_1}},$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon c_w}{c_1},$$

$$\beta = \frac{k_v L^2}{\lambda_q}$$

und

$$\text{Pe} = \frac{2 v c_w \varepsilon L}{\sqrt{\lambda_q \lambda_l}};$$

darin bedeuten v die mittlere tatsächliche Strömungsgeschwindigkeit des Wassers, L die halbe Dicke der porösen Schicht, c die auf das Volumen bezogene spezifische Wärme und ϑ die Temperatur, wobei sich der Index w auf

das Wasser, g auf das Gestein, 2 auf die undurchlässigen Nachbarschichten und 1 auf die poröse Schicht insgesamt bezieht. Es ist somit

$$c_1 = \varepsilon c_w + (1 - \varepsilon) c_g .$$

Weiter bedeuten ϑ_0 die Temperatur, die das gesamte Feld vor Einpressen des Wassers hatte und ϑ_e die Eintrittstemperatur des Wassers.

Mit diesen Größen und den beschriebenen Vereinfachungen ergibt die Wärmebilanz für den Wasseranteil in einem Volumenelement:

$$-\frac{4}{\text{Pe}^2} \frac{\partial^2 \bar{\Theta}_w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \bar{\Theta}_w}{\partial \eta} + \sigma \frac{\partial \bar{\Theta}_w}{\partial \tau} + 3 (\bar{\Theta}_w - \Theta_L) = \beta (\bar{\Theta}_g - \bar{\Theta}_w) \quad (34)$$

Die entsprechende Bilanz für das Gestein liefert

$$(1 - \sigma) \frac{\partial \bar{\Theta}_g}{\partial \tau} = \beta (\bar{\Theta}_w - \bar{\Theta}_g) \quad (35)$$

$\bar{\Theta}_w$ und $\bar{\Theta}_g$ sind die über den Strömungsquerschnitt gemittelten Temperaturen in der porösen Schicht.

Die Wärmeleitung in den undurchlässigen Nachbarschichten wird durch die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \Theta_2}{\partial \tau}$$

beschrieben. Hier ist die Wärmeleitung in y -Richtung vernachlässigt, da die Veränderungen der Temperatur in x -Richtung um Zehnerpotenzen größer sind als die Veränderung in y -Richtung.

Für die Schichtgrenze $\xi = 0$ gilt

$$3 (\bar{\Theta}_w - \Theta_L) = -\kappa \left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (37)$$

und

$$\Theta_2 (\xi = 0) = \Theta_L . \quad (38)$$

Schließlich werden die Anfangs- und Randbedingungen benötigt. Sie lauten:

$$\text{für } \tau = 0 \text{ ist } \Theta_2 = \bar{\Theta}_g = \bar{\Theta}_w = 0 \quad (39)$$

$$\text{und für } \tau > 0 \text{ und } \eta = 0 \text{ ist } \bar{\Theta}_w = 1 . \quad (40)$$

Die Randbedingung gemäß Gl. (40) ist nicht ganz unproblematisch, da bei Berücksichtigung der Wärmeleitung in Strömungsrichtung die Wassertemperatur am Eintritt in die poröse Schicht strenggenommen einen Sprung

erfährt. Der Sprung ist im vorliegenden Fall aber klein und soll nicht weiter berücksichtigt werden.

Die Gln. (34) bis (36) bilden ein System linearer partieller Differentialgleichungen, die unmittelbar und durch Gl. (37) und (38) miteinander gekoppelt sind. Das System läßt sich mit Hilfe der Laplace-Transformation integrieren. Dazu wird die Transformationsgleichung

$$\Theta^* = \int_0^\infty \Theta e^{-p\tau} d\tau$$

verwendet, in der p die Bildvariable ist¹⁾. Die Transformation ergibt an Stelle der Gln. (36) bis (39) die folgenden Beziehungen

$$-\frac{4}{\text{Pe}^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_w^*}{d\eta^2} + \frac{d\bar{\Theta}_w^*}{d\eta} + \sigma p \bar{\Theta}_w^* + 3 (\bar{\Theta}_w^* - \Theta_L^*) = \beta (\bar{\Theta}_g^* - \bar{\Theta}_w^*) \quad (41)$$

$$(1 - \sigma) p \bar{\Theta}_g^* = \beta (\bar{\Theta}_w^* - \bar{\Theta}_g^*) \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_2}{\partial \xi^2} = p \Theta_2^* \quad (43)$$

$$3 (\bar{\Theta}_w^* - \Theta_L^*) = -\kappa \left(\frac{\partial \Theta_2^*}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} \quad (44)$$

$$\Theta_2^* (\xi = 0) = \Theta_L^* \quad (45)$$

und

$$\text{für } \eta = 0 \text{ ist } \bar{\Theta}_w^* = \frac{1}{p} \quad (46)$$

Die Anfangsbedingung ist durch die Transformation berücksichtigt.

Man löst nun zunächst Gl. (42) und erhält

$$\Theta_2^* = B(\eta) e^{-\xi \sqrt{p}}, \quad (47)$$

wobei berücksichtigt ist, daß Θ_2^* für große ξ verschwinden muß. $B(\eta)$ ist eine Integrationsfunktion, die durch Einsetzen von Gl. (47) in die Kopplungsbedingungen Gl. (45) und (46) mit Θ_L^* und der Wassertemperatur $\bar{\Theta}_w^*$ verknüpft wird:

$$\Theta_L^* = B(\eta) \quad (48)$$

$$3 (\bar{\Theta}_w^* - \Theta_L^*) = \kappa \sqrt{p} B(\eta).$$

¹⁾ Zur Anwendung der Laplace-Transformation s. z. B. *G. Doetsch* [10] sowie *H. S. Carslaw* und *J. C. Jaeger* [8].

Dies liefert den Zusammenhang

$$\bar{\Theta}_w^* = \Theta_L^* \left(1 + \frac{1}{3} \kappa \sqrt{p} \right). \quad (49)$$

Mit dieser Beziehung läßt sich aus Gl. (41) Θ_L^* eliminieren und ebenso mit Hilfe von Gl. (42) $\bar{\Theta}_g^*$. Damit ergibt sich folgende gewöhnliche lineare Differentialgleichung für $\bar{\Theta}_w^*$:

$$-\frac{4}{\text{Pe}^2} \frac{d^2 \bar{\Theta}_w^*}{d\eta^2} + \frac{d \bar{\Theta}_w^*}{d\eta} + \bar{\Theta}_w^* \left[\sigma p + \frac{\kappa \sqrt{p}}{1 + \frac{1}{3} \kappa \sqrt{p}} + \frac{\beta (1 - \sigma) p}{\beta + (1 - \sigma) p} \right] = 0.$$

Mit der Randbedingung (46) und wenn berücksichtigt wird, daß $\bar{\Theta}_w^*$ für große η verschwinden muß, lautet die Lösung dieser Gleichung

$$\bar{\Theta}_w^* = \frac{1}{p} \exp \left[\frac{1}{8} \text{Pe}^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{8} \text{Pe}^2 \right)^2 + \frac{1}{4} \text{Pe}^2 S(p)} \right] \quad (50)$$

mit der Abkürzung

$$S(p) = \sigma p + \frac{\kappa \sqrt{p}}{1 + \frac{1}{3} \kappa \sqrt{p}} + \frac{\beta (1 - \sigma) p}{\beta + (1 - \sigma) p}. \quad (51)$$

Für die Rücktransformation von $\bar{\Theta}_w^*$ auf $\bar{\Theta}_w$ gilt folgendes Integral

$$\bar{\Theta}_w = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{\Theta}_w^*(p) e^{p\tau} dp. \quad (52)$$

Darin ist γ eine reelle Konstante, die so zu wählen ist, daß alle Singularitäten des Integranden links von der Linie $p = \gamma$ liegen. Gl. (50) zeigt, daß der Integrand bei $p = 0$ einen Pol hat. Man kann daher die Integration vornehmen, indem man $\gamma = 0$ setzt, also p von $-i\infty$ bis $+i\infty$ laufen läßt, aber einen halbkreisförmigen Bogen mit unendlich kleinem Radius um den Punkt $p = 0$ beschreibt, so daß der Pol gerade noch links des Integrationsweges liegt. Das Integral längs dieses Bogens erhält man leicht, indem man p durch die Polarkoordinaten ϱ und φ ausdrückt, also

$$p = \varrho e^{i\varphi}$$

substituiert und den Grenzwert des Integrals für $\varrho \rightarrow 0$ bestimmt. Da für $\varrho \rightarrow 0$ $S(p)$ verschwindet, erhält man für dieses Bogenintegral

$$\int_{\varphi = -\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\varrho e^{i\varphi}} i \varrho e^{i\varphi} d\varphi = i\pi.$$

Das Transformationsintegral Gl. (52) lautet damit

$$\bar{\Theta}_w = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^0 \bar{\Theta}_w^*(p) e^{p\tau} dp + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{i\infty} \bar{\Theta}_w^*(p) e^{p\tau} dp.$$

Nun wird im ersten Integral dieser Gleichung $p = -i \frac{2}{\kappa^2} u$ substituiert, im

zweiten $p = +i \frac{2}{\kappa^2} u$. Für die Ausführung der Integration sind die beiden

Integranden in Real- und Imaginärteil zu zerlegen, wobei sich für das erste und zweite Integral zueinander konjugiert komplexe Ausdrücke ergeben. Die hierzu notwendige Rechnung ist etwas mühsam, aber ohne besondere mathematische Schwierigkeiten. Das Ergebnis lautet schließlich

$$\bar{\Theta}_w = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} - \frac{1}{8} \text{Pe}^2\right) \eta} \sin\left(\frac{2\tau}{\kappa^2} u - \eta \sqrt{\frac{a-b}{2}}\right) \frac{du}{u}, \quad (53)$$

wobei a und b komplizierte Funktionen der Integrationsvariablen u sind. Es ist

$$a = \sqrt{\left(\frac{1}{8} \text{Pe}^2\right)^4 + 4 M \left(\frac{1}{8} \text{Pe}^2\right)^3 + 4 (M^2 + N^2) \left(\frac{1}{8} \text{Pe}^2\right)^2} \quad (54)$$

$$b = \left(\frac{1}{8} \text{Pe}^2\right)^2 + \frac{1}{4} M \text{Pe}^2 \quad (55)$$

mit

$$M = \frac{\sqrt{u} + \frac{2}{3} u}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{u} + \frac{2}{9} u} + \frac{\frac{4}{\beta \kappa^4} (1 - \sigma)^2 u^2}{1 + \frac{4}{\beta^2 \kappa^4} (1 - \sigma)^2 u^2} \quad (56)$$

und

$$N = 2 \frac{\sigma}{\kappa^2} u + \frac{\sqrt{u}}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{u} + \frac{2}{9} u} - \frac{\frac{2}{\kappa^2} (1 - \sigma) u}{1 + \frac{4}{\beta^2 \kappa^4} (1 - \sigma)^2 u^2}. \quad (57)$$

Gl. (53) ist die gesuchte Beziehung für den Verlauf der Wassertemperatur als Funktion der dimensionslosen Zeit τ und der dimensionslosen Entfernung η vom Wassereintritt. Als Parameter erscheinen neben σ und κ der dimensionslose Wärmeübertragungskoeffizient β für den Wärmeübergang vom Wasser an das Gestein und die Pécletsche Kennzahl Pe , die den Einfluß der Wärmeleitung in Strömungsrichtung erfaßt; die effektive Wärmeleitzahl λ_l ist nur in Pe enthalten.

Eine analytische Lösung des uneigentlichen Integrals in Gl. (53) läßt sich nicht angeben. Dagegen kann die Integration leicht numerisch mit Hilfe einer elektronischen Rechenmaschine ausgeführt werden. Der Integrand ist überall endlich, das Integral konvergiert schnell. Die Ergebnisse werden später diskutiert.

Wenn β nicht unendlich groß ist, unterscheidet sich die Temperatur des Gesteins, $\bar{\Theta}_g$ von der Wassertemperatur $\bar{\Theta}_w$. Die transformierte Temperatur $\bar{\Theta}_g^*$ erhält man aus Gl. (42) zu

$$\bar{\Theta}_g^* = \frac{\bar{\Theta}_w^*}{1 + \frac{1}{\beta} (1 - \sigma) p}$$

mit Gl. (50) ist also

$$\bar{\Theta}_g^* = \frac{1}{p \left[1 + \frac{1}{\beta} (1 - \sigma) p \right]} \exp \left[\frac{1}{8} Pe^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{8} Pe^2 \right)^2 + \frac{1}{4} Pe^2 S(p)} \right].$$

Die Rücktransformation erfolgt analog zur Rücktransformation von $\bar{\Theta}_w^*$. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_g = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} - \frac{1}{8} Pe^2\right) \eta} \left[\frac{1}{u} \sin \left(\frac{2\tau}{\kappa^2} u - \eta \sqrt{\frac{a-b}{2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\beta \kappa^2} (1 - \sigma) \cos \left(\frac{2\tau}{\kappa^2} u - \eta \sqrt{\frac{a-b}{2}} \right) \right] \frac{du}{1 + \frac{4}{\beta^2 \kappa^4} (1 - \sigma)^2 u^2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Die transformierte Temperatur in den Nachbarschichten ergibt sich aus Gl. (47) bis (50) zu

$$\Theta_2^* = \frac{1}{p \left(1 + \frac{1}{3} \kappa \sqrt{p} \right)} \exp \left[\xi \sqrt{p} + \frac{1}{8} Pe^2 - \sqrt{\left(\frac{1}{8} Pe^2 \right)^2 + \frac{1}{4} Pe^2 S(p)} \right].$$

Die Rücktransformation führt hier auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \theta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\exp\left[-\xi \frac{\sqrt{u}}{\tau} - \eta \left(\sqrt{\frac{a+b}{2}} - \frac{1}{8} \text{Pe}^2\right)\right]}{u \left(1 + \frac{2}{3} \sqrt{u} + \frac{9}{2} u\right)} & \left[\left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{u}\right) \sin\left(\frac{2}{\kappa^2} \tau u - \eta \sqrt{\frac{a-b}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \xi \frac{\sqrt{u}}{\kappa}\right) - \frac{1}{3} \sqrt{u} \cos\left(\frac{2}{\kappa^2} \tau u - \eta \sqrt{\frac{a-b}{2}} - \xi \frac{\sqrt{u}}{\kappa}\right) \right] du. \quad (59) \end{aligned}$$

Gl. (58) und (59) lassen sich ebenso gut numerisch integrieren wie Gl. (53).

4.3. Kontrolle des Ansatzes über die Wärmeleitung quer zur Strömungsrichtung

Um die Genauigkeit des Ansatzes über die Wärmeleitung quer zur Strömungsrichtung, den die Gleichungen (53), (58) und (59) enthalten, zu prüfen, soll für einen besonders einfachen Fall eine Lösung zum Vergleich herangezogen werden, in der die Wärmeleitung quer zur Strömung exakt berücksichtigt ist. Dazu wird das Temperaturfeld betrachtet, das sich ergibt, wenn die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigt wird und der Wärmeübergangskoeffizient k_v unendlich groß ist. Bei Vernachlässigung der Wärmeleitung in Strömungsrichtung geht $\lambda_l \rightarrow 0$ und Pe wird unendlich groß. Eine Grenzübergangsbetrachtung zeigt dann, daß

$$\lim_{\text{Pe} \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{a+b}{2}} - \frac{1}{8} \text{Pe}^2 \right] = M \quad (60)$$

und

$$\lim_{\text{Pe} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{a-b}{2}} = N \quad (61)$$

wird.

Mit $k_v \rightarrow \infty$ geht auch $\beta \rightarrow \infty$, $\bar{\theta}_g$ wird gleich $\bar{\theta}_w$ und die Funktionen M und N vereinfachen sich zu

$$M(\beta = \infty) = \frac{\sqrt{u} + \frac{2}{3} u}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{u} + \frac{2}{9} u} \quad (62)$$

und

$$N(\beta = \infty) = \frac{2}{\kappa^2} u + \frac{\sqrt{u}}{1 + \frac{2}{3} \sqrt{u} + \frac{2}{9} u}, \quad (63)$$

so daß aus Gl. (53) und Gl. (58) nach Einsetzen von M und N folgt

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[- \frac{\sqrt{u} + \frac{2}{3}u}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{u} + \frac{2}{9}u} \eta \right] \sin \left[\frac{2u}{\kappa^2} \tau_\eta - \frac{\sqrt{u}}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{u} + \frac{2}{9}u} \eta \right] \frac{du}{u} \quad (64)$$

mit

$$\tau_\eta = \tau - \eta.$$

$\bar{\Theta}_1$ bezeichnet die Wasser und Gestein gemeinsame mittlere Temperatur in der porösen Schicht.

τ_η kann man als eine vom Ort abhängige Zeitkoordinate ansehen, deren Zählung zur absoluten Zeit $\tau = \eta$ beginnt. Die Auswertung von Gl. (64) zeigt, daß für $\tau_\eta < 0$, also für $\tau < \eta$ die Temperatur $\bar{\Theta}_1 = 0$ ist, und für $\tau \geq \eta$ zunächst steil ansteigt. Eine einfache Überlegung bestätigt dies Ergebnis. Betrachtet man das Temperaturfeld für den Fall, das die Nachbarschichten nicht wärmeleitend sind und ebenso wie in Gl. (64) $k_v \rightarrow \infty$ und $\lambda_l \rightarrow 0$ geht, so kann in der porösen Schicht nur die Temperatur $\bar{\Theta}_w = \bar{\Theta}_g = 0$ und $\bar{\Theta}_w = \bar{\Theta}_g = 1$ auftreten, da keinerlei Transportmechanismen wirken, die den zur Zeit $\tau = 0$ am Wassereintritt vorhandenen Temperatursprung abflachen können. Die zeitliche Entwicklung des Feldes besteht darin, daß dieser Sprung sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit von der Eintrittsbohrung fortbewegt. Eine Wärmebilanz ergibt, daß für die Sprungstelle

$$2 L v t \varepsilon (\vartheta_e - \vartheta_0) c_w = 2 L y c_1 (\vartheta_e - \vartheta_0)$$

oder

$$\tau = \eta$$

gelten muß. Wenn nun wie in Gl. (64) die Wärmeleitung quer zur Strömungsrichtung in den Nachbarschichten berücksichtigt wird, so kann sich an diesem Ergebnis nichts ändern, solange kein zusätzlicher Transportmechanismus in Strömungsrichtung in Betracht gezogen wird. Es muß also auch in diesem Fall die Temperatur für $\eta > \tau$ den ursprünglichen Wert ϑ_0 und erst für $\eta < \tau$ darüber liegende Werte aufweisen. Gl. (64) zeigt weiter, daß für den betrachteten Fall die dimensionslose Temperatur nur von den beiden Variablen η und $\frac{1}{\kappa^2} \tau_\eta$ abhängt

$$\bar{\Theta}_1 = f \left(\eta; \frac{1}{\kappa^2} \tau_\eta \right). \quad (65)$$

Mit Gl. (64) soll das Temperaturfeld verglichen werden, in dem die Wärmeleitung quer zur Strömungsrichtung exakt erfaßt ist. Hierfür gilt in den undurchlässigen Nachbarschichten weiterhin Gl. (36). Auch die Anfangs- und

Randbedingungen gemäß Gl. (39) und (40) bleiben bestehen. An Stelle der Differentialgleichungen (34) und (35) für die undurchlässige Schicht tritt aber

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \Theta_1}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Theta_1}{\partial (x/L)^2} = 0 \quad \text{für } \left| \frac{x}{L} \right| \leq 1, \quad (66)$$

worin $\Theta_1 = \Theta_1(x/L; \eta, \tau)$ die Temperatur in der porösen Schicht ist. Die Kopplungsbedingungen (37) und (38) lauten jetzt

$$\left(\frac{\partial \Theta_1}{\partial \frac{x}{L}} \right)_{\frac{x}{L} = 1} = \kappa \left(\frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} \right)_{\xi = 0}$$

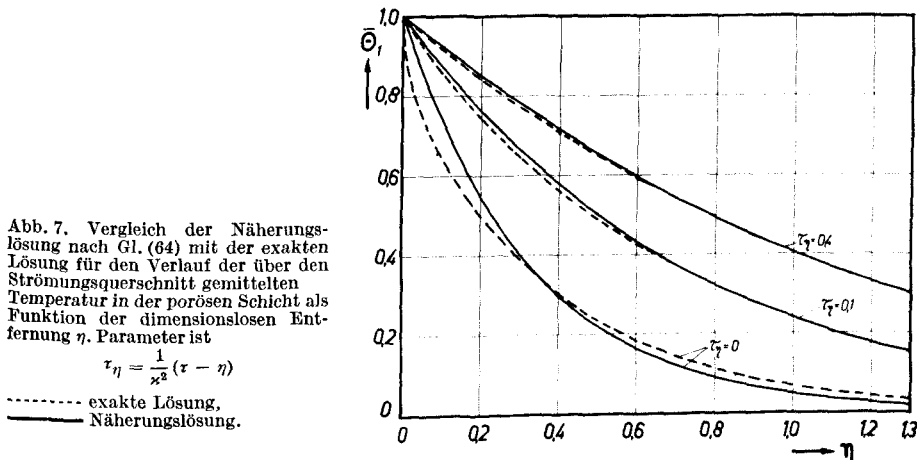
und

$$\bar{\Theta}_2(\xi = 0) = \Theta_1 \left(\left| \frac{x}{L} \right| = 1 \right).$$

Gl. (66) und (36) mit den zugehörigen Kopplungs-, Rand- und Anfangsbedingungen wurden mit Hilfe einer doppelten Laplace-Transformation gelöst, wobei aus der von x abhängigen Temperatur Θ_1 der über den Querschnitt gemittelte Wert

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{1}{L} \int_0^L \Theta_1 dx$$

bestimmt wurde. Das Ergebnis ist ein außerordentlich verwickeltes Doppelintegral, dessen numerische Auswertung fast ebenso aufwendig ist wie die unmittelbare numerische Integration von Gl. (66) und (36) mit Hilfe eines Differenzenverfahrens. Es soll daher auf die Angabe und Herleitung dieser Beziehung verzichtet werden. Die Ergebnisse der numerischen Auswertung sind zusammen mit denen von Gl. (66) in Abb. 7 und 8 dargestellt.



In Abb. 7 ist der Temperaturverlauf nach Gl. (66) und nach der exakten Lösung aufgezeichnet, und zwar hier bei konstantem τ_η , weil diese Darstellung allgemein möglich ist. Eine Darstellung bei konstantem τ macht es notwendig, einen Wert für κ anzunehmen. Abb. 7 zeigt, daß die Fehler der Näherungsgleichung im allgemeinen für $\tau_\eta = 0$ am größten sind und daß sie mit wachsendem τ_η sehr schnell geringer werden. Der Grund für dieses Verhalten ist leicht einzusehen. Er liegt darin, daß zu Anfang der Wärmeleitwiderstand der Nachbarschichten noch keine Rolle spielt, so daß der Temperaturverlauf allein durch den in Gl. (66) näherungsweise berücksichtigten Widerstand der porösen Schicht bestimmt wird. Die Fehler bei $\tau_\eta = 0$, also beim Sprung, sind zwar relativ groß, aber praktisch unbedeutend. Dies zeigt Abb. 8.

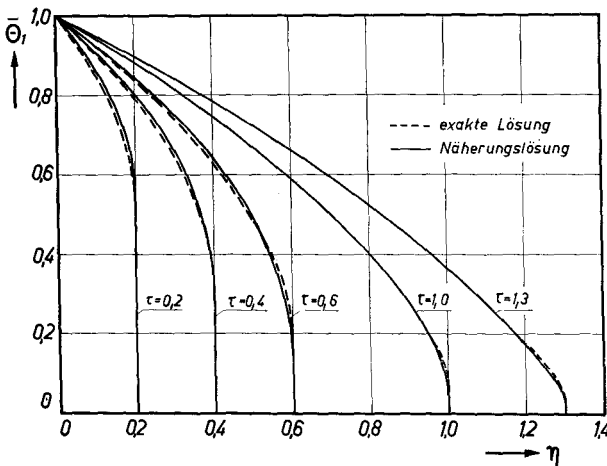


Abb. 8. Vergleich der Näherungslösung nach Gl. (64) mit der exakten Lösung für den Verlauf der über den Strömungsquerschnitt gemittelten Temperatur der porösen Schicht als Funktion der dimensionslosen Entfernung η . Parameter ist die dimensionslose Zeit τ .

----- exakte Lösung,
— Näherungslösung.

Hier sind Kurven für den Temperaturverlauf bei jeweils konstanter Zeit τ aufgezeichnet, wobei $\kappa = 1$ gewählt ist. Hier erkennt man den auf Seite 388 diskutierten Sprung. In dieser Darstellung unterscheiden sich die Kurven nach der exakten Gleichung und die nach der Näherungsmethode nur wenig voneinander, obwohl die Abweichungen genau so groß sind wie in Abb. 7. Der Grund für dieses Verhalten ist, daß gerade in dem Gebiet, wo die Fehler relativ groß sind, die Kurven sehr steil verlaufen.

Abb. 8 macht deutlich, daß die Näherungsmethode den Temperaturverlauf mit großer Genauigkeit wiedergibt. Aber für die Beurteilung der Brauchbarkeit eines Näherungsverfahrens ist nicht nur dessen Genauigkeit wichtig, sondern auch die Frage, welche Vereinfachung die Näherungsmethode gegenüber einer exakten Rechnung bringt. Schon die Herleitung der Gleichungen für den Temperaturverlauf erfordert bei der exakten Lösung erheblich mehr Aufwand als bei der Näherungsmethode. Wesentlicher ist, daß die numerische Auswertung der genauen Lösung etwa 100mal so viel Rechenzeit erfordert wie die Auswertung von Gl. (66).

Das Verfahren, den Wärmeleitwiderstand der porösen Schicht quer zur Strömungsrichtung durch den konstanten Wert $\frac{L}{3 \lambda_g}$ zu erfassen, ist also sehr brauchbar. Es gibt den Temperaturverlauf mit guter Näherung wieder und vereinfacht die Rechnung außerordentlich. Es ist sicher zulässig, anzunehmen, daß das Näherungsverfahren ebenso gut ist, wenn die Wärmeleitung in Strömungsrichtung und der Wärmewiderstand zwischen Wasser und Gestein nicht vernachlässigt werden.

4.4. Die Bedeutung des Wärmewiderstandes zwischen strömendem Wasser und Gestein

Für die Untersuchung dieses Einflusses soll die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigt werden. Dazu ist $\lambda_l = 0$ zu setzen, so daß Pe unendlich groß wird. Für die Berechnung der Temperatur des Wassers ist Gl. (53) zu verwenden, wobei der Grenzübergang für $Pe \rightarrow \infty$ nach Gl. (60) und (61) vollzogen werden muß.

Damit wird

$$\bar{\Theta}_w = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-M \eta} \sin \left(\frac{2 \tau}{\kappa^2} u - N \eta \right) \frac{du}{u}. \quad (67)$$

Die Temperatur des Gesteins ist mit Gl. (58)

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_g = & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-M \eta} \left[\frac{1}{u} \sin \left(\frac{2 \tau}{\kappa^2} u - N \eta \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\beta \kappa^2} (1 - \sigma) \cos \left(\frac{2 \tau}{\kappa^2} u - N \eta \right) \right] \frac{du}{1 + \frac{4}{\beta^2 \kappa^4} (1 - \sigma)^2 u^2}. \end{aligned} \quad (68)$$

Den Verlauf der Temperatur des strömenden Wassers nach Gl. (67) zeigt Abb. 9, und zwar für den Fall, daß $\kappa = 1,0$ und $\sigma = 1/3$ ist und für die Zeit $\tau = 0,48$. Die Darstellung zeigt, daß an der Stelle $\eta = 0,48$ der Temperaturabfall um so steiler wird, je größer β ist, d. h. je größer die Wärmeübergangszahl ist. Für $\beta = \infty$ ergeben sich die schon in Abb. 8 gezeigten Kurven, bei deren Berechnung die Wärmeübergangszahl als unendlich groß angesetzt ist.

Die in praktischen Fällen vorkommenden Werte von β erhält man mit Gl. (30) und Gl. (32) zu

$$\beta = \frac{\varepsilon \left(\frac{2 L}{d_h} \right)^2}{\left(\frac{\lambda_w}{\alpha d_h} + 0,13 \frac{1 - \varepsilon \lambda_w}{\varepsilon \lambda_g} \right) \left(\frac{3}{16} \frac{v c_w d_h}{\lambda_w} (1 - \varepsilon) + \frac{\lambda_1}{\lambda_w} \right)}. \quad (69)$$

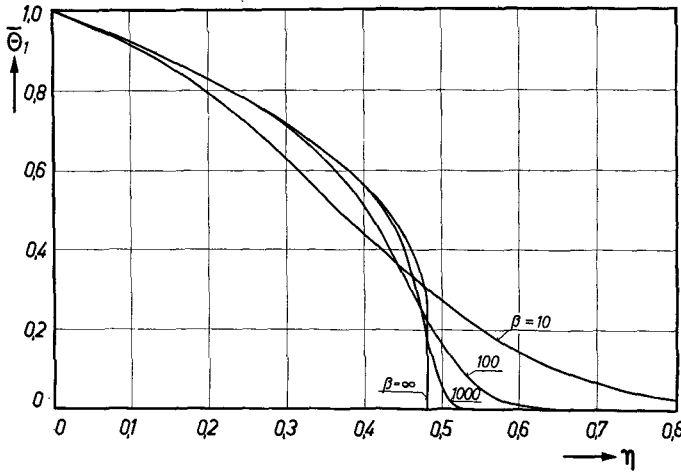


Abb. 9. Der Verlauf der mittleren Temperatur $\bar{\Theta}_w$ des Wassers in der porösen Schicht zur Zeit $\tau = 0,48$ als Funktion der Entfernung η von der Eintrittsstelle des Wassers für verschiedene Werte des dimensionslosen effektiven Wärmeübergangskoeffizienten β . Die Wärmeleitung in Strömungsrichtung ist vernachlässigt.

$$\kappa = 1,0; \sigma = \frac{1}{3}.$$

Die dimensionslose Wärmeübergangszahl β wird am kleinsten, wenn man für $\frac{\alpha d_h}{\lambda_w}$ den kleinstmöglichen Wert 3,65 einsetzt und für ε den kleinsten praktisch interessierenden Betrag wählt, etwa $\varepsilon = 0,1$. Setzt man außerdem für das Verhältnis der Wärmeleitzahl des Wassers zur Wärmeleitzahl des Gesteins

$$\frac{\lambda_w}{\lambda_g} = 1,$$

so folgt aus Gl. (69)

$$\beta = \frac{0,41 \left(\frac{2L}{d_h} \right)^2}{\frac{v c_w d_h}{\lambda_w} + 5,9}.$$

Das Verhältnis der Schichtdicke $2L$ zum hydraulischen Durchmesser der Poren d_h ist eine sehr große Zahl; sie liegt mindestens in der Größenordnung von 1000. Die Größe $\frac{v c_w d_h}{\lambda_w}$ hat mit $v = 10 \text{ m/h}$ und $d_h = 2 \text{ mm}$ den Wert 33. Daher ist mindestens

$$\beta \approx 10^4.$$

Abb. 9 zeigt, daß man für diesen Fall mit einer Genauigkeit, die für praktische Fälle ausreicht, so rechnen kann, als sei β unendlich groß. Dies gilt insbesondere, wenn man aus dem Temperaturverlauf den Wärmeverlust an die Nachbarschichten bestimmen will. Im Gebiet $\eta > \tau$ ist bei endlichen Werten von β der Wärmefluß in die Umgebung größer als bei unendlich großem β , da hier

die Temperatur $\bar{\Theta}_w$ bei endlichem β größer ist als bei unendlich großem β . Für $\eta < \tau$ ist es gerade umgekehrt, so daß der gesamte Wärmefluß nur wenig von β abhängt.

Man darf daher bei der Berechnung des Temperaturfeldes in der ölführenden Schicht und bei der Ermittlung des Wärmeverlustes aus dieser Schicht den Wärmewiderstand zwischen dem strömenden Wasser und dem Gestein vernachlässigen.

4.5. Die Bedeutung der Wärmeleitung in Strömungsrichtung

Der Einfluß der Wärmeleitung in Strömungsrichtung auf das Temperaturfeld kommt durch die Péclet'sche Kennzahl Pe zum Ausdruck. Er läßt sich am leichtesten untersuchen, wenn man den Wärmewiderstand zwischen dem strömenden Wasser und dem Gestein vernachlässigt, d. h. $\beta = \infty$ setzt. Der Temperaturverlauf in der porösen Schicht ergibt sich unmittelbar aus Gl. (53) wobei M und N nach Gl. (62) und (63) eingesetzt werden. Die Temperatur des Gesteins $\bar{\Theta}_g$ stimmt in diesem Falle mit der Temperatur des Wassers $\bar{\Theta}_w$ überein. Sie werden gemeinsam mit $\bar{\Theta}_1$ bezeichnet.

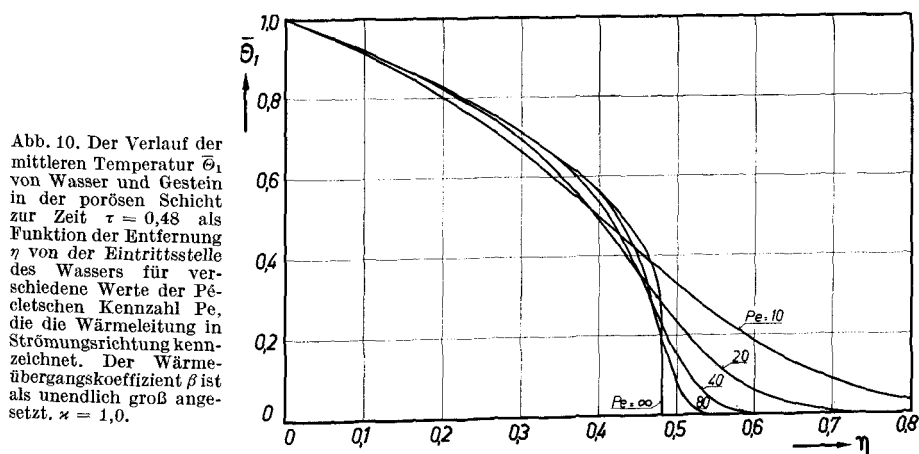


Abb. 10. Der Verlauf der mittleren Temperatur $\bar{\Theta}_1$ von Wasser und Gestein in der porösen Schicht zur Zeit $\tau = 0,48$ als Funktion der Entfernung η von der Eintrittsstelle des Wassers für verschiedene Werte der Péclet'schen Kennzahl Pe , die die Wärmeleitung in Strömungsrichtung kennzeichnet. Der Wärmeübergangskoeffizient β ist als unendlich groß angesetzt, $\kappa = 1,0$.

Abb. 10 zeigt Temperaturkurven für $\kappa = 1,0$ und für die Zeit $\tau = 0,48$. Die Größe von σ ist ohne Bedeutung, wenn $\beta = \infty$ ist. Die Kurven sind in ihrem Verlauf fast nicht von denen aus Abb. 9 zu unterscheiden, in denen Pe unendlich groß und β endlich war. Man erkennt aus Abb. 10 außerdem, daß in praktischen Fällen der Einfluß der Wärmeleitung in Strömungsrichtung unbedeutend wird, wenn $Pe \geq 80$ ist. Mit Gl. (32) und Gl. (3) sowie Gl. (33) und Gl. (5) wird

$$Pe = \frac{2 L v c_w \varepsilon}{\sqrt{\left(\frac{3}{16} (1 - \varepsilon) v d_h c_w + \lambda_1\right) \left(2,5 (1 - \varepsilon) v d_h c_w + \lambda_1\right)}} \quad (70)$$

Bei größeren Strömungsgeschwindigkeiten kann die reine Wärmeleitung vernachlässigt werden. Dann ist

$$\text{Pe} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \sqrt{\frac{32}{15}} \frac{2L}{d_h}$$

nur noch eine geometrisch bestimmte Größe. Setzt man wieder $2L/d_h \approx 1000$ und $\varepsilon = 0,1$, so wird

$$\text{Pe} = 170.$$

Abb. 10 zeigt, daß in diesem Fall die effektive Wärmeleitung in Strömungsrichtung keinen merklichen Einfluß auf das Temperaturfeld hat. Man kann daher vielfach den Wärmeverlust hinreichend genau unter der Annahme $\text{Pe} \rightarrow \infty$ bestimmen.

4.6. Übertragung des Ergebnisses auf den rotationssymmetrischen Fall

Die Überlegungen der vorhergehenden Abschnitte haben gezeigt, daß die Wärmeleitung in Strömungsrichtung und der Wärmewiderstand zwischen dem strömenden Wasser und dem Gestein in den meisten praktisch vorkommenden Fällen gering ist und daß das Temperaturfeld im wesentlichen durch die Wärmeableitung quer zur Strömungsrichtung bestimmt wird. Die Rechnungen wurden unter der Voraussetzung durchgeführt, daß das heiße Wasser durch einen geraden, unendlich langen Graben in die ölführende Schicht gepreßt wird. Die Annahme, daß die Flüssigkeit durch eine Bohrung von Kreisquerschnitt in die poröse Schicht gedrückt würde, hätte bei Berücksichtigung der Wärmeleitung in Strömungsrichtung zu sehr viel verwickelteren Gleichungen geführt. Nachdem sich nun herausgestellt hat, daß die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigt werden kann, ist es aber auf einfache Weise möglich, auch den rotationssymmetrischen Fall zu behandeln.

Dabei ist allerdings zu beachten, daß in einem rotationssymmetrischen System die Wassergeschwindigkeit v und damit wie Gl. (70) zeigt auch die Kennzahl Pe nach außen hin abnehmen. Es ist daher zweckmäßig, bei praktischen Anwendungen zu prüfen, ob Pe auch an der Sprungstelle noch so groß ist, daß die Wärmeleitung vernachlässigt werden kann. Es ist weiter zu bedenken, daß auch λ_q in rotationssymmetrischen Systemen nicht mehr örtlich konstant ist, da es von der Wassergeschwindigkeit abhängt. Dennoch soll λ_q in der folgenden Rechnung als konstant angesetzt werden. Dies stimmt um so besser, je geringer der Einfluß der Mischung quer zur Wasserströmung auf den Wärmetransport in dieser Richtung und je größer der Anteil der reinen Wärmeleitung ist. Mit dieser Voraussetzung bildet sich das Temperaturfeld in der porösen Schicht nach der folgenden Differentialgleichung aus:

$$\frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \eta_r} + 3(\bar{\theta}_1 - \theta_L) = 0. \quad (71)$$

Darin ist

$$\eta_r = \frac{\lambda_q}{v_e c_w \varepsilon L} \frac{r_e}{2L} \left(\frac{r^2}{r_e^2} - 1 \right),$$

r die Entfernung von der Bohrlochachse, r_e der Bohrlochradius, v_e die Wassergeschwindigkeit am Eintritt in die poröse Schicht.

Gl. (71) stimmt formal mit der Differentialgleichung des entsprechenden ebenen Problems überein, wenn dort η durch η_r ersetzt wird. Man erkennt dies leicht, indem man in Gl. (34) und (35) Pe und β gegen unendlich gehen läßt und beachtet, daß gleichzeitig $\bar{\Theta}_g = \bar{\Theta}_w = \bar{\Theta}_1$ wird. Die Beziehungen (36) bis (38) und die Anfangs- und Randbedingungen (39) und (40) gelten auch für den rotationssymmetrischen Fall, wenn η durch η_r ersetzt wird. Die Lösung für das rotationssymmetrische Temperaturfeld ergibt sich daher unmittelbar aus der Lösung der Gln. (34) bis (40), wenn dort $Pe \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$ und $\eta = \eta_r$ gesetzt wird. Man kann hierzu Gl. (64) heranziehen und erhält für den rotationssymmetrischen Fall

$$\bar{\Theta}_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp \left[- \frac{\sqrt{u} + \frac{2}{3}u}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{u} + \frac{2}{9}u} \eta_r \right] \sin \left[\frac{2u\tau_{\eta r}}{\kappa^2} - \frac{\sqrt{u}}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{u} + \frac{2}{9}u} \eta_r \right] \frac{du}{u}, \quad (72)$$

wobei

$$\tau_{\eta r} = \tau - \eta_r$$

ist.

Die durchgezogenen Kurven in Abb. 8 sind Lösungen dieser Gleichung, die dort zum Vergleich mit der exakten Rechnung eingetragen wurden. Abb. 11 zeigt den Temperaturverlauf in der porösen Schicht nach Gl. (72) ausführ-

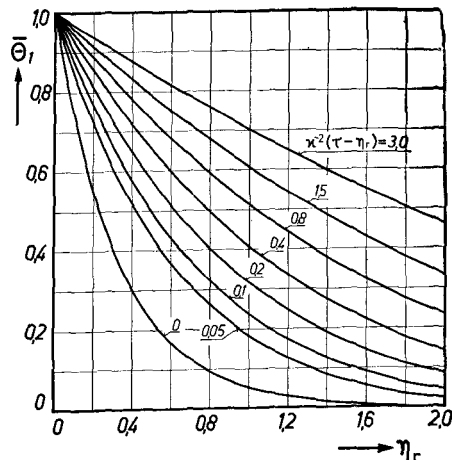


Abb. 11. Der Verlauf der mittleren Temperatur $\bar{\Theta}_1$ in der porösen Schicht im rotationssymmetrischen Fall als Funktion der dimensionslosen Entfernung von der Wassereintrittsstelle η_r für verschiedene Werte des Parameters $\frac{1}{\kappa^2}(\tau - \eta_r)$.

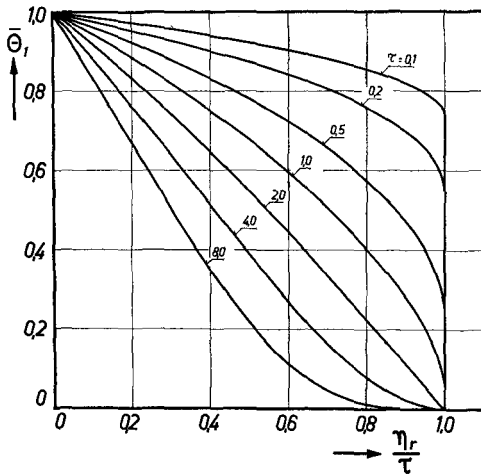


Abb. 12. Der Verlauf der mittleren Temperatur $\bar{\Theta}_1$ in der porösen Schicht als Funktion des Verhältnisses des dimensionslosen Entfernung η_r zur dimensionslosen Zeit τ bei $\kappa = 1$. An der Stelle $\eta_r/\tau = 1$ springt $\bar{\Theta}_1$ auf den Wert Null, den es für $\eta_r/\tau > 1$ behält.

licher, wobei die Kurven für konstante Werte $\frac{1}{\kappa^2} (\tau - \eta_r)$ gelten. Aus diesem Diagramm kann man die Temperatur $\bar{\Theta}_1$ für verschiedene Werte von κ , τ und η_r ablesen. Die Abb. 12 und 13 geben den Temperaturverlauf bei konstanter Zeit τ an, und zwar für $\kappa = 1,0$ in Abb. 12 und für $\kappa = 0,5$ in Abb. 13. Als unabhängige Veränderliche ist in diesen Darstellungen das Verhältnis

$$\frac{\eta_r}{\tau} = \left(\frac{r^2}{r_e^2} - 1 \right) \frac{r_e}{v_e t} \frac{c_1}{\epsilon c_w} \quad (73)$$

gewählt. Der Temperatursprung tritt immer bei $\frac{\eta_r}{\tau} = 1$ auf. Ein Vergleich von Abb. 12 mit Abb. 13 kann zunächst den Eindruck erwecken, als lägen bei

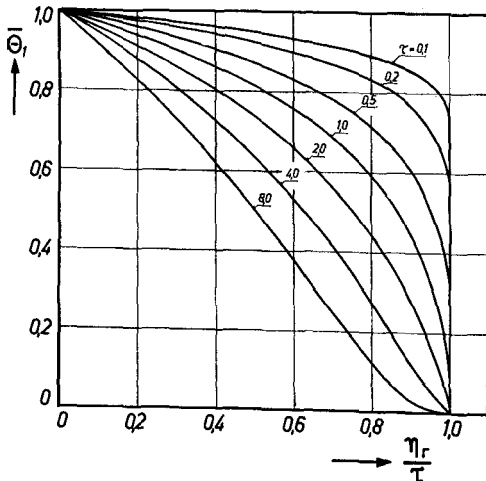


Abb. 13. Der Verlauf der mittleren Temperatur $\bar{\Theta}_1$ in der porösen Schicht als Funktion des Verhältnisses der dimensionslosen Entfernung zur dimensionslosen Zeit bei $\kappa = 0,5$. An der Stelle $\eta_r/\tau = 1$ springt $\bar{\Theta}_1$ auf den Wert Null, den es für $\eta_r/\tau > 1$ behält.

kleinerem Wert von κ die Temperaturen grundsätzlich höher. Dies gilt indessen nur für gleiches τ . Da der Maßstab der Zeit sich bei einer Veränderung von κ ändern kann, ist konstantes τ nicht gleichbedeutend mit konstanter absoluter Zeit.

5. Der Wärmeverlust an die Nachbarschichten

Für die praktische Beurteilung eines thermischen Sekundärverfahrens ist es wichtig, den Teil der zugeführten Enthalpie zu kennen, der für den Zweck des Prozesses verlorengeht, d. h. der in die undurchlässigen Nachbarschichten abfließt. Dieser Anteil läßt sich aus der Gleichung für den Temperaturverlauf leicht berechnen. Insgesamt ist in der Zeit t folgende Enthalpie durch die Bohrung in die poröse Schicht getreten:

$$I_{zu} = 2 L 2 r_e \pi v_e \varepsilon c_w (\vartheta_e - \vartheta_0) t. \quad (74)$$

Die Enthalpie ist bei ϑ_0 null gesetzt. In der porösen Schicht ist zur Zeit t die folgende Enthalpie enthalten:

$$I_1 = \int_{r_e}^{r_s} 2 L 2 r \pi c_1 (\bar{\vartheta}_1 - \vartheta_0) dr. \quad (75)$$

r_s bedeutet hierbei den Radius, bei dem die Temperatur auf ϑ_0 sinkt. Dort ist $\eta_r = \tau$.

Für das Verhältnis I_1/I_{zu} erhält man aus den Gln. (74) und (75)

$$\frac{I_1}{I_{zu}} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \bar{\Theta}_1 d\eta_r.$$

Der Wärmeverlust Q_v ist offenbar

$$Q_v = I_{zu} - I_1$$

und demnach gilt

$$\frac{Q_v}{I_{zu}} = 1 - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \bar{\Theta}_1 d\eta_r.$$

Das Verhältnis Q_v/I_{zu} kann zwischen null und eins liegen. Es hängt nur von τ und κ ab. Abb. 14 zeigt Q_v/I_{zu} als Funktion der dimensionslosen Zeit τ für einige Werte von κ .

Eine andere Darstellung des Wärmeverlustes zeigt Abb. 15. Hier ist Q_v/I_{zu} als Funktion der Größe

$$\kappa^2 \tau = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^2 t \frac{\lambda_2}{L^2 c_2}$$

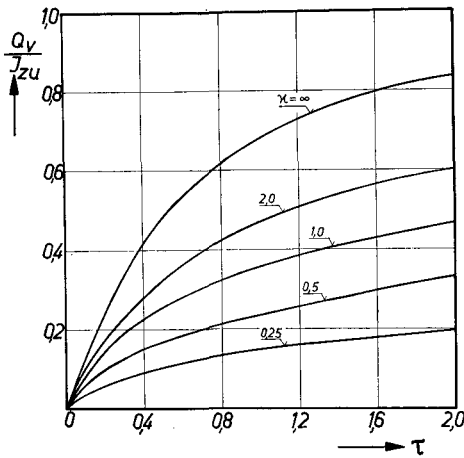


Abb. 14. Der gesamte Wärmeverlust an die Nachbarschichten Q_v bezogen auf die gesamte durch das Wasser zugeführte Enthalpie I_{zu} als Funktion der dimensionslosen Zeit τ für verschiedene Werte des Verhältnisses κ .

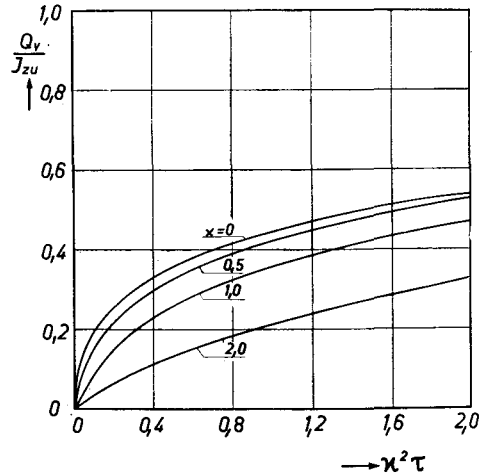


Abb. 15. Der gesamte Wärmeverlust an die Nachbarschichten Q_v bezogen auf die gesamte durch das Wasser zugeführte Enthalpie I_{zu} als Funktion der dimensionslosen Zeit $\kappa \tau$ für verschiedene Werte des Verhältnisses κ .

aufgetragen. Dieses Diagramm ist für große Werte von λ_q , also kleine Werte von κ geeignet. So gilt die Kurve $\kappa = 0$ z. B., wenn λ_q unendlich groß ist. Dieser Fall wurde auch in der erwähnten Arbeit von *Lauwerier* [18] behandelt. Allerdings ist dort nur das Temperaturfeld bestimmt, nicht aber der Wärmeverlust. In praktischen Fällen liegt κ zwischen 0,5 und 1,5. Abb. 15 zeigt, daß dann die Annahme $\kappa = 0$ große Fehler verursachen kann.

6. Ein Beispiel

In eine Erdölschicht von 6 m Mächtigkeit werden durch eine Bohrung von 0,30 m Durchmesser stündlich $2,5 \text{ m}^3$ Wasser von 250°C gepreßt. Vor dem Eindringen des heißen Wassers hatte die Schicht und ihre Umgebung eine Temperatur von 50°C . Gesucht ist die Entfernung von der Bohrung bis zu der die Erwärmung nach 40 Tagen vorgedrungen ist, die Temperatur an dieser Stelle, sowie der Bruchteil der eingebrachten Energie, der nach dieser Zeit insgesamt an die Nachbarschichten verloren gegangen ist.

Für die ölführende Schicht sind folgende Daten gegeben. Das gesamte relative Porenvolumen beträgt 25 %. Davon sind 70 % mit Öl und 30 % mit Salzwasser ausgefüllt. Weiter ist bekannt (Zahlen z. T. nach *Marx* und *Langenheim* [20])

Spezifische Wärme des Öls	1680	$\text{kJ/m}^3\text{grd}$
Wärmeleitzahl des Öls	0,14	W/mgrd
Spezifische Wärme des Gesteins	2350	$\text{kJ/m}^3\text{grd}$
Wärmeleitzahl des Gesteins	2,60	W/mgrd
Spezifische Wärme der Nachbarschichten	2350	$\text{kJ/m}^3\text{grd}$
Wärmeleitzahl der Nachbarschichten	2,60	W/mgrd
Spezifische Wärme des Wassers	3900	$\text{kJ/m}^3\text{grd}$
Wärmeleitzahl des Wassers	0,68	W/mgrd

Die Erwärmung eines unterirdischen Ölfeldes beim Einpressen von heißem Wasser 399

Das dem Wasser zur Verfügung stehende relative Porenvolumen ε ergibt sich zu

$$\varepsilon = 0,25 \cdot 0,30 = 0,075 .$$

Außerdem sind $0,25 \cdot 0,7 = 17,5\%$ des gesamten Volumens mit Öl angefüllt, während der Rest, 75% , durch Gestein gebildet ist.

Die für Öl und Gestein maßgebende spezifische Wärme c_g ergibt sich aus den Werten für das Öl und für das Gestein zu

$$c_g = \frac{0,175 \cdot 1680 + 0,75 \cdot 2350}{0,925} = 2220 \text{ kJ/m}^3\text{grad} .$$

Bei der für das Öl und Gestein gültigen mittleren Wärmeleitzahl muß man davon ausgehen, daß das Gestein mit Öl bedeckt ist, so daß die Widerstände zu addieren sind. Daher ist

$$\frac{0,925}{\lambda_g} = \left(\frac{0,175}{0,14} + \frac{0,75}{2,60} \right) \frac{\text{mgrad}}{\text{W}} ,$$

also $\lambda_g = 0,60 \text{ W/mgrad}$.

Für die mittlere spezifische Wärme c_1 der ölführenden Schicht einschließlich des Wassers erhält man

$$c_1 = 0,075 \cdot 3900 + 0,925 \cdot 2220 = 2340 \text{ kJ/m}^3\text{grad} .$$

Die Entfernung, bis zu der sich der Temperatursprung bewegt hat, ergibt sich mit $\eta_r = \tau$ aus Gl. (73) zu

$$r_s^2 = r_e^2 + \frac{r_e v_e c_w \varepsilon}{c_1} t .$$

Dabei ist

$$r_e v_e = \frac{2,5}{0,075 \cdot 6 \cdot 2\pi} = 0,884 \text{ m}^2/\text{h} ,$$

also

$$r_s^2 = \left(0,15^2 + \frac{0,884 \cdot 3900 \cdot 0,075}{2340} \cdot 40 \cdot 24 \right) \text{m}^2$$

$$\underline{\underline{r_s = 10,3 \text{ m} .}}$$

An dieser Stelle beträgt die Wassergeschwindigkeit

$$v_s = \frac{r_e v_e}{r_s} = 0,086 \text{ m/h} ,$$

während sie am Bohrungsumfang den Wert

$$v_e = \frac{r_e v_e}{r_e} = 5,9 \text{ m/h}$$

hat.

Es soll nun kontrolliert werden, ob die Pécletsche Kennzahl Pe bei $r = r_s$ noch so groß ist, daß die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigt werden kann. Aus Gl. (70) erhält man mit den gegebenen Daten und $d_h = 1 \text{ mm}$ an der Sprungstelle $Pe = 60$ und am Bohrloch $Pe = 560$. Abb. 10 zeigt, daß in diesem Fall die Wärmeleitung in Strömungsrichtung nur geringen Einfluß auf das Temperaturprofil hat. Praktisch ist meistens d_h wesentlich kleiner als 1 mm . Dann ergeben sich erheblich größere Pe -Zahlen, so daß man zur Berechnung des Wärmeverlustes $Pe = \infty$ setzen kann.

Für die weitere Rechnung wird die effektive Wärmeleitzahl quer zur Strömungsrichtung benötigt. Sie kann aus Gl. (32) und Gl. (3) bestimmt werden und ergibt sich zu

$$\lambda_q = 0,63 \text{ W/mgrd.}$$

Für v ist dabei die Geschwindigkeit bei $r = 5 \text{ m}$ eingesetzt. Sie beträgt $0,177 \text{ m/h}$. Mit λ_q ergibt sich

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_q c_1}} = \sqrt{\frac{2,60 \cdot 2350}{1,04 \cdot 2340}} = 2,1$$

und

$$\tau = t \frac{\lambda_q}{L^2 c_1} = 40 \cdot 24 \frac{0,63}{9 \cdot 2340} 3,6 = 0,103.$$

Für die Sprungtemperatur erhält man aus Abb. 11 bei $\tau = \eta_r$

$$\bar{\Theta}_1 = 0,75$$

und daraus $\vartheta = 50 + 0,75 \cdot 200 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$.

Der Wärmeverlust bezogen auf die zugeführte Enthalpie ergibt sich aus Abb. 14 zu

$$\frac{Q_v}{I_{zu}} = 12\%.$$

Die zu Anfang gestellten Fragen sind wie folgt zu beantworten.

Die ölführende Schicht ist nach 40 Tagen bis zu 10 m Entfernung von der Bohrlochachse erwärmt. Die Temperatur beträgt in dieser Entfernung $200 \text{ }^\circ\text{C}$. Insgesamt sind 12% der eingebrachten Energie in die Nachbarschichten geflossen.

7. Grenzen der Anwendbarkeit der Ergebnisse dieser Arbeit und Ausblick auf weitere notwendige Untersuchungen

Das Ergebnis der Untersuchungen dieser Arbeit ist eine Reihe von Beziehungen, aus denen man im Falle der ebenen Strömung die Temperaturfelder des Wassers, des Öls und Gesteins und der angrenzenden Schichten ermitteln kann. Aus den Temperaturfeldern wiederum läßt sich der Wärmeverlust der ölführenden Schicht an das angrenzende undurchlässige Gestein bestimmen. Wenn man die Wärmeleitung in Strömungsrichtung vernachlässigen kann, ist es leicht möglich, diese Ergebnisse auf den praktisch wichtigeren rotationssymmetrischen Fall zu übertragen.

Damit kann man in vielen Fällen Temperaturfelder und Wärmeverlust mit hinreichender Genauigkeit bestimmen. Dies schafft die Grundlage für eine Beurteilung der Wirtschaftlichkeit des Verfahrens. Einige der im Laufe dieser Untersuchung getroffenen Annahmen schränken jedoch die Anwendbarkeit der Ergebnisse ein und erlauben häufig nur eine überschlägige Rechnung. Weitere Arbeit ist daher notwendig, um auch die Einflüsse zu berücksichtigen, deren Wirkung in der vorliegenden Untersuchung vernachlässigt wurde.

So ist z. B. die Frage offen geblieben, wie sich die Schwerkraft und eine schräge Lage der ölführenden Schicht auf das Temperaturfeld auswirken. Um dies zu untersuchen, muß man zunächst den Strömungsvorgang behandeln. Aber es wird große Schwierigkeiten bereiten, die für die Ausbildung des Temperaturfeldes maßgebenden Differentialgleichungen mit anderen als den bisher vorausgesetzten einfachen Strömungsfeldern zu lösen.

Weiter ist die Frage zu untersuchen, in welchen Grenzen es zulässig ist, den relativen Porenraum, der dem strömenden Wasser zur Verfügung steht, zeitlich und örtlich konstant zu setzen, wie es in dieser Arbeit geschehen ist, und auf welche Weise es möglich ist, die tatsächlich stattfindenden durch die Verdrängung des Öls bedingten Veränderungen dieses Porenraumes zu berücksichtigen.

Schließlich ist die in dieser Arbeit getroffene Voraussetzung, daß die Stoffwerte konstant sind, nicht immer zulässig. Insbesondere lassen sich die Ergebnisse nicht ohne weiteres auf das Einpressen von Dampf übertragen, ein Verfahren, das zunehmende Bedeutung erhält. Auch ist daran zu denken, daß die effektiven Wärmeleitzahlen λ_l und λ_q von der Wassergeschwindigkeit abhängen und deshalb im rotationssymmetrischen Fall nur noch näherungsweise als konstant angesehen werden können.

Bei allen weiteren Untersuchungen, die mit dem Ziel vorgenommen werden, die Genauigkeit der hier gewonnenen Ergebnisse zu verbessern, sollte man aber nicht übersehen, daß bei praktischen Anwendungen viele Daten, die für eine genaue Berechnung nötig sind, fehlen. Auf Grund dieses Mangels an Information könnte selbst ein exaktes Berechnungsverfahren nur Ergebnisse von beschränkter Genauigkeit liefern.

8. Zusammenfassung

Es wurde das Temperaturfeld berechnet, das sich in einer unterirdischen, erdölführenden Schicht und in ihrer Umgebung beim Eindrücken von heißem Wasser ausbildet. Dabei wurde angenommen, daß Schwerkrafteinflüsse

vernachlässigt werden dürfen, daß das eingepreßte Wasser mit einer über den Strömungsquerschnitt gleichmäßigen Geschwindigkeit von der Eintrittsöffnung fortströmt und daß die Stoffwerte der beteiligten Medien konstant sind.

Unter diesen Voraussetzungen wird das Temperaturfeld grundsätzlich von den vier folgenden Vorgängen beeinflusst: Erstens von der Wärmeableitung in undurchlässige Nachbarschichten, zweitens von der Wärmeübertragung zwischen Wasser und Gestein einschließlich des Öls, drittens von der Wärmeleitung in Strömungsrichtung und viertens von den bei der Strömung in porösen Medien auftretenden konvektiven Mischungsvorgängen. Andere Autoren haben festgestellt, daß der Einfluß dieser konvektiven Mischung mit Hilfe einer effektiven Wärmeleitzahl erfaßt werden kann. Man kann daher die unter drittens und viertens erwähnten Mechanismen in einem, der effektiven Wärmeleitung, zusammenfassen.

Um die Lösung nicht zu verwickelt werden zu lassen, wurde darauf verzichtet, das Temperaturprofil in der ölführenden Schicht quer zur Strömungsrichtung zu bestimmen. Statt dessen wurde nur die mittlere Temperatur berechnet und für den Wärmewiderstand der porösen Schicht quer zur Strömungsrichtung ein konstanter Wert eingesetzt. Dieses Verfahren ist, wie eine Überprüfung in einem verhältnismäßig einfachen Fall zeigte, sehr genau.

An Hand der mit den geschilderten Voraussetzungen aufgestellten allgemeinen Lösung wurde die Bedeutung der verschiedenen Einflüsse untersucht. Dazu war es nötig, eine Gleichung herzuleiten, aus der sich die für den Wärmeübergang von Wasser an das Gestein maßgebende effektive Wärmeübergangszahl berechnen ließ. Es zeigte sich, daß in praktischen Fällen der Einfluß der Wärmeableitung aus der ölführenden Schicht in die undurchlässigen Nachbarschichten der bei weitem bedeutendste ist.

Aus dem Temperaturfeld wurde schließlich dieser Wärmeverlust bestimmt und, bezogen auf die durch das Wasser zugeführte Enthalpie, in einem Diagramm als Funktion einer dimensionslosen Zeit dargestellt, wobei nur noch ein Parameter auftrat, der sich aus Stoffwerten zusammensetzt.

Die Ergebnisse sind vielfach unmittelbar für die Berechnung eines Sekundärverfahrens verwendbar, in anderen Fällen, in denen die angedeuteten Vereinfachungen zu stark von der Wirklichkeit abweichen liefern sie Grundlagen, auf denen eine genauere Betrachtung aufgebaut werden kann.

Formelzeichen

a	s. Gl. (54)
b	s. Gl. (55)
$B(\eta)$	Integrationsfunktion
c	auf die Volumeneinheit bezogene spezifische Wärme
d	Teilchendurchmesser
d_h	hydraulischer Durchmesser des Porenraums, Gl. (2)
ΔF	Oberfläche des strömenden Wassers im Volumenelement ΔV
I	Enthalpie
k	effektiver Wärmeübergangskoeffizient für den Wärmeübergang vom Wasser an das Öl und Gestein einschl. des Wärmewiderstandes von Öl und Gestein

k_v	auf die Volumeneinheit bezogenes k
K	$\alpha_i R_i$
l	halbe Dicke einer ebenen Platte
L	halbe Mächtigkeit der ölführenden Schicht
M	s. Gl. (56)
n_i	Zahl der Teilchen mit dem Radius R_i in einer Schüttung pro Volumeneinheit
N	s. Gl. (57)
p	Bildvariable bei der Laplace-Transformation mit τ als Originalvariabler
Pe	$\frac{2 L v c_w \varepsilon}{\sqrt{\lambda_l \lambda_q}}$ Péclet'sche Kennzahl
Q	Wärmemenge
Q_v	Wärmeverlust aus der porösen Schicht in der Zeit t
r	Entfernung von der Bohrlochmitte
s	laufende Ortsvariable in einem bestimmten Integral
$S(p)$	s. Gl. (51)
t	Zeit
R	Radius der Teilchen einer Schüttung (Kugel oder Zylinder)
R_i	Radius der i -ten Gruppe gleich großer Teilchen in einer Schüttung
R_{\max}	größter vorkommender Teilchenradius
u	laufende Variable bei Integration
v	mittlere Geschwindigkeit des Wassers in den Poren
ΔV	Volumenelement in der porösen Schicht
W	Wärmewiderstand s. Gl. (31)
x	Ortskoordinate quer zur Strömungsrichtung, gemessen von der Mittelebene der porösen Schicht
y	Ortskoordinate in Strömungsrichtung, gemessen von der Eintrittsstelle des Wassers
z	laufende Zeit- oder Ortsvariable in bestimmten Integralen
α	Wärmeübergangskoeffizient für den Wärmeübergang vom Wasser an das Gestein
α_i	Wärmeübergangskoeffizient an der Kugel mit dem Radius R_i
β	$\frac{k_v L^2}{\lambda_q}$, dimensionsloser effektiver Wärmeübergangskoeffizient
γ	reelle Konstante, die den Integrationsweg festlegt, s. S. 384
ε	dem Wasser zur Verfügung stehender Porenraum bezogen auf das Gesamtvolumen
η	$\frac{\lambda_q}{v c_w \varepsilon L} \frac{y}{L}$
η_r	$\frac{\lambda_q}{v c_w \varepsilon L} \frac{r_e}{2 L} \left(\frac{r^2}{r_e^2} - 1 \right)$
ϑ	Temperatur
Θ	$\frac{\vartheta - \vartheta_0}{\vartheta_e - \vartheta_0}$, dimensionslose Temperatur
κ	$\sqrt{\frac{\lambda_2 c_2}{\lambda_q c_1}}$
λ	Wärmeleitfähigkeit
λ_i	$\varepsilon \lambda_{wi} + (1 - \varepsilon) \lambda_g$
λ_q	$\varepsilon \lambda_{wq} + (1 - \varepsilon) \lambda_g$
λ_{wi}	s. Gl. (5)
λ_{wq}	s. Gl. (3)
ξ	$\frac{ x - L}{L} \sqrt{\frac{\lambda_q c_2}{\lambda_2 c_1}}$

σ	$\varepsilon \frac{c_w}{c_1}$
τ	$t \frac{\lambda_q}{L^2 c_1}$ dimensionslose Zeit
τ_η	$\frac{\tau - \eta}{\kappa^2}$ relative dimensionslose Zeit
$\tau_{\eta r}$	$\frac{\tau - \eta_r}{\kappa^2}$

Bedeutung wiederholt verwendeter Indizes

0	zur Zeit Null
1	poröse Schicht (Wasser, Öl und Gestein gemeinsam)
2	massive Nachbarschicht
∞	nach unendlich langer Zeit
e	am Eintritt des Wassers in die poröse Schicht
ex	bei exakter Rechnung
g	Gestein und Öl gemeinsam
l	in Strömungsrichtung
L	an der Grenze zwischen poröser und massiver Schicht
q	quer zur Strömungsrichtung
s	an der Stelle des Temperatursprungs
w	Wasser
zu	zugeführt
*	kennzeichnet die abhängigen Variablen in der Bildebene der Laplace-Transformation
—	über den Strömungsquerschnitt gemittelte Temperaturen in der porösen Schicht

Die vorliegende Arbeit entstand als Habilitationsschrift am Institut für Thermodynamik und Verfahrenstechnik der Technischen Hochschule Hannover. Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. *H. Hausen*, möchte ich an dieser Stelle nicht nur für die Förderung dieser Untersuchung danken, sondern auch für die Unterstützung, die ich während meiner Zugehörigkeit zu seinem Institut bei ihm gefunden habe.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die finanziellen Mittel, die sie zur Durchführung der Arbeit zur Verfügung stellte.

Literatur

- [1] *Amundson, N. R.*: Solid-fluid interactions in fixed and moving beds. Fixed beds with small particals. I.E.Ch. 48 (1956) S. 26 bis 35.
- [2] *Amundson, N. R.*: Solid-fluid interactions in fixed and moving beds. Fixed beds with large particals. I.E.Ch. 48 (1956) S. 35 bis 43.
- [3] *Anzelius, A.*: Über Erwärmung vermittelt durchströmter Medien. Z. angew. Math. Mech. 6 (1926) S. 291.
- [4] *Atkinson, C. H.* und *R. T. Johansen*: A study of the feasibility of using nuclear explosions to increase petroleum recovery. R. I 6494, USBM 1964.

- [5] *Cairnes, E. J. und J. M. Prausnitz*: Longitudinal mixing in packed beds. Chem. Eng. Sc. **12** (1960) S. 20 bis 34.
- [6] *Carberry, J. J. und R. H. Bretton*: Axial dispersion of mass in flow through fixed beds. A.I.Ch.E. Journal **4** (1958) S. 367 bis 375.
- [7] *Carney Jr., C. L. und R. P. Gilbert*: On the theory of hot-water drives. Journ. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP) Vol XII, Fasc. **6** (1961) S. 489 bis 496.
- [8] *Carslaw, H. S. und J. C. Jaeger*: Conduction of heat in solids. Clarendon Press, 2. Aufl. 1959.
- [9] *Denton, W. H.*: The Heat Transfer and Flow Resistance for Fluid Flow Through Randomly Packed Spheres. Proceedings of the General Discussion on Heat Transfer. Instn. Mech. Engrs. London (1951) 370/373.
- [10] *Doetsch, G.*: Einführung in Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart. 1958.
- [11] *Ebach, E. A. und R. R. White*: Mixing of fluids flowing through beds of packed solids. A.I.Ch.E. Journal **4** (1958), S. 161 bis 169.
- [12] *Green, D. W., R. H. Perry und R. E. Babcock*: Longitudinal dispersion of thermal energy through porous media with a flowing fluid. A.I.Ch.E. Journal **10** (1964), S. 645 bis 651.
- [13] *Grigull, U., Gröber/Erk*: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Springer-Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg. 3. Aufl. 1963. Insbes. S. 44 bis 52.
- [14] *Hausen, H.*: Näherungsverfahren zur Berechnung des Wärmeaustausches in Regeneratoren. Z. angew. Math. Mech. **11** (1931) S. 105/114.
- [15] *Hausen, H.*: Wärmeübertragung im Gegenstrom, Gleichstrom und Kreuzstrom. Springer-Verlag Berlin—Göttingen—Heidelberg. 1. Aufl. 1950.
- [16] *Jenkins, R. und J. S. Aronofsky*: Analysis of heat transfer processes in porous media — New concepts in reservoir heat engineering. Producers Monthly, März 1955 S. 37 bis 41.
- [17] *Klinkenberg, A.*: Numerical evaluation of equations describing transient heat and mass transfer in packed solids. I.E.Ch. **40** (1948) S. 1992 bis 1994.
- [18] *Lauverier, H. A.*: The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot water. Appl. Scientific Research, Sec. A **5** (1955) S. 115 bis 150.
- [19] *Liles, A. W. und C. J. Geankoplis*: Axial diffusion of liquids in packed beds and end effects. A.I.Ch.E. Journal **6** (1960) S. 591 bis 595.
- [20] *Marx, J. W. und R. H. Langenheim*: Reservoir heating by hot fluid injection. Trans. American Inst. of Mining, Metallurgical and Petrol. Eng. (AIME) **216** (1959) S. 312 bis 315.
- [21] *Nußelt, W.*: Der Wärmeübergang im Kreuzstrom. Z. VDI **55** (1911) S. 2021 bis 2024.
- [22] *Nußelt, W.*: Die Theorie des Winderhitzers. Z. VDI **71** (1927), S. 85 bis 91.
- [23] *Nußelt, W.*: Eine neue Formel für den Wärmedurchgang im Kreuzstrom. Techn. Mech. und Therm. **1** (1930) S. 417 bis 422.
- [24] *Owens, W. D. und V. E. Suter*: Steam stimulation for secondary recovery. Producers Monthly, Apr. 1965, S. 8 bis 13.
- [25] *Owens, W. D. und V. E. Suter*: Steam stimulation newest form of secondary petroleum recovery. Oil Gas J. **63** (1965) Nr. 17, S. 82 bis 90.
- [26] *Rühl, W.*: Entölung von Erdöllagerstätten durch Sekundärverfahren. Beihefte zum geologischen Jahrbuch H. 4, Hannover 1952.
- [27] *Schlünder, E. U.*: Wärme und Stoffübertragung zwischen durchströmten Schüttungen und darin eingebetteten Einzelkörpern. Chem.-Ing.-Techn. **38** (1966) 9, 967/979.
- [28] *Schulz, W.*: Über die Anwendung von Wärme zur besseren Ausbeutung von Erdöllagerstätten unter besonderer Berücksichtigung des Insitu-Verbrennungsprozesses. Experimentelle Untersuchungen zu diesem Verfahren im Hinblick auf eine praktische Feldanwendung. Erdölzeitschrift für Bohr- und Schießtechnik **78** (1962), S. 17 bis 44.

- [29] *Schumann, T. E. W.*: Heat Transfer. A liquid flowing through a porous prism. Journal of the Franklin Institute **208** (1929), S. 405 bis 416.
- [30] *Stahl, C. D.*: Review of new processes for secondary recovery. Producers Monthly **27** (1963) S. 6 bis 7.
- [31] *Wainerdi, R. E.*: Possible use of a nuclear explosive for stimulation of a natural gas reservoir. Producers Monthly, Aug. 1965, S. 24 bis 25.
- [32] *Wainerdi, R. E.*: Nuclear explosives and their uses to the oil and gas industry. Producers Monthly, Nov. 1965, S. 22.